教育部审定
2013

义务教育教科书

数学

SHUXUE

九年级上册

浙江教育出版社

义务教育教科书

数学 九年级上册

SHUXUE

本册教科书编写人员

实验版（2004～2013）

主　编　范良火

副主编　岑　申　张宝珍

编写人员　范良火　金才华　王亚权　金克勤　徐鸿斌　岑　申　许芬英

2014年版

主　编　范良火

副主编　岑　申　张宝珍　许芬英

编写人员　范良火　金才华　许芬英　王亚权　金克勤　岑　申

浙江教育出版社

前　言

亲爱的同学：

当这册数学教科书放在你面前时，你又开始了一段新的数学学习之旅.

翻开新书，你会感受到数学世界的精彩：九年级上册主要内容有**二次函数**，**简单事件的概率**，**圆的基本性质**，以及**相似三角形**.二次函数是刻画现实世界的重要的数学模型，从中我们将进一步学习通过建立函数模型来解决问题的数学思想和方法.通过简单事件的概率的学习，相信你会对现实生活中遇到的必然事件、不可能事件、不确定事件等现象有更好的认识，加深对概率意义的认识，学会简单事件的概率的计算方法和估计方法.圆是一种重要的平面图形，从中我们将学到它的许多有用的性质.相似三角形的学习将使我们进一步认识相似图形的性质，学会如何判定两个三角形相似，并运用相似形的知识解决简单的实际问题.

这册新的数学教科书，保持了前几册的体例、结构和理念.“合作学习”，让你与同伴一起探索新的数学知识、新的数学方法；“探究活动”，使你亲身经历知识的发生过程，体验“发现”的快乐；“阅读材料”帮助你了解许多有趣的数学史实，开阔你的数学视野；而“设计题”和“课题学习”，则为你提高分析和解决问题的能力，并在数学中进行探索、实践和创新提供了机会.

数学是重要的基础学科，是学习物理、化学、地理、生物、经济等学科的必备知识；数学能培养我们的思考能力，增强逻辑性和精确性，使人思维缜密、思路清晰；数学更是认识世界，把握事物本质的科学，具有简洁之美，朴素之真.

数学是严谨的，它需要学习者有足够的勤奋和毅力；但数学并不神秘，只要有充分的兴趣和良好的方法，每个人都可以学好它.

这套教科书按照教育部最新制订的《义务教育数学课程标准》（2011年版）编写的，7～9年级共6册.我们殷切希望它能成为你的朋友，能够帮助你掌握数学知识，提高数学能力，欣赏数学魅力，享受学习乐趣.

祝你学习快乐，学业进步！

编　者

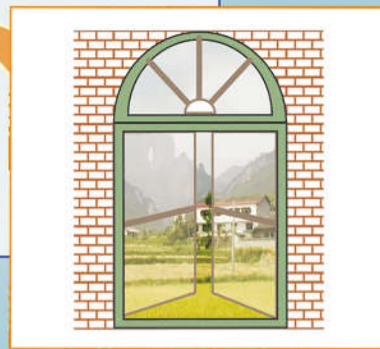
目 录

第 1 章

二次函数

目录 CONTENTS<<

有一个窗户形状如图，上部是半圆，下部是矩形. 如果制作窗框的材料总长为6 m，那么如何设计这个窗户，使透光面积最大？



运动员投篮后，篮球运动的路线是怎样一条曲线？怎样计算篮球达到最高点时的高度？

上述问题可以通过二次函数的数学模型来解决. 本章我们将学习二次函数的概念，二次函数的图象，并通过图象探索二次函数的性质，以及二次函数的一些简单的实际应用.

1·1 二次函数

一个长方形温室的占地面积为y(m^2),周长为120 m,一边长为x(m). 你能得出y关于x的函数关系吗?

合作学习

HEZUOXUEXI

用适当的函数表达式表示下列问题中两个变量 y 与 x 之间的关系.

(1) 圆的面积 y(cm^2)与圆的半径 x(cm).

(2) 王师傅存入银行 2 万元,先存一个一年定期,一年后将本息转存为又一个一年定期. 设年利率均为 x,两年后王师傅共得本息 y 元.

(3) 一个温室连同外围通道的矩形平面图如图 1-1. 这个矩形的周长为 120 m,设一条边长为 x(m),种植用地面积为 y(m^2).

上述三个问题中,函数表达式具有哪些共同的特征?

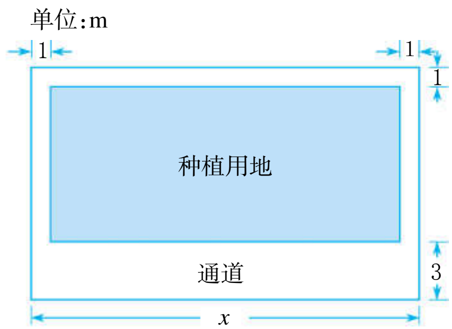


图 1-1

上述三个函数表达式均可化简为 $y=ax^2+bx+c$ (a,b,c 是常数,$a\neq0$)的形式.

我们把形如 $y=ax^2+bx+c$(其中 a,b,c 是常数,$a\neq0$)的函数叫做**二次函数**(quadratic function),称 a 为二次项系数,b 为一次项系数,c 为常数项. 例如,二次函数 $y=-x^2+58x-112$ 的二次项系数 $a=-1$,一次项系数 $b=58$,常数项 $c=-112$;二次函数 $y=\pi x^2$ 的二次项系数 $a=\pi$,一次项系数 $b=0$,常数项 $c=0$.

做一做 ZUOYIZUO

1. 下列函数中，哪些是二次函数？

（1）$y=x^2$.　　（2）$y=-\frac{1}{x^2}$.　　（3）$y=2x^2-x-1$.

（4）$y=x(1-x)$.　　（5）$y=(x-1)^2-(x+1)(x-1)$.

2. 分别说出下列二次函数的二次项系数、一次项系数和常数项.

（1）$y=x^2+1$.（2）$y=-3x^2+7x-12$.（3）$y=2x(1-x)$.

例1　如图 1-2，一张正方形纸板的边长为 2 cm，将它剪去 4 个全等的直角三角形（图中阴影部分）. 设 $AE=BF=CG=DH=x$（cm），四边形 $EFGH$ 的面积为 y（cm^2）.

（1）求 y 关于 x 的函数表达式和自变量 x 的取值范围.

（2）当 x 分别为 0.25，0.5，1，1.5，1.75 时，求对应的四边形 $EFGH$ 的面积，并列表表示.

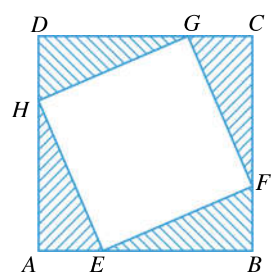


图 1-2

解　（1）由题意，$0<x<2$，

$$y=2^2-4\times\frac{1}{2}\times x(2-x)=2x^2-4x+4.$$

即所求函数表达式为 $y=2x^2-4x+4$，

x 的取值范围为 $0<x<2$.

（2）当 $x=0.25$ cm 时，

$y=2\times0.25^2-4\times0.25+4=3.125(\text{cm}^2)$.

依次计算可得，

当 $x=0.5$ cm 时，$y=2.5(\text{cm}^2)$；当 $x=1$ cm 时，$y=2(\text{cm}^2)$；

当 $x=1.5$ cm 时，$y=2.5(\text{cm}^2)$；当 $x=1.75$ cm 时，$y=3.125(\text{cm}^2)$.

列表如下：

表 1–1

x（cm）	0.25	0.5	1	1.5	1.75
y（cm^2）	3.125	2.5	2	2.5	3.125

例2　已知二次函数 $y=x^2+bx+c$，当 $x=1$ 时，函数值是 4；当 $x=2$ 时，函数值是 -5. 求这个二次函数的表达式.

解 把 $x=1, y=4$; $x=2, y=-5$ 分别代入函数式 $y=x^2+bx+c$，得方程组 $\begin{cases}1+b+c=4,\\4+2b+c=-5,\end{cases}$

解这个方程组，得 $\begin{cases}b=-12,\\c=15.\end{cases}$

所以所求二次函数的表达式是 $y=x^2-12x+15$.

课内练习 KENEILIANXI

1. 说出二次函数 $y=ax^2+bx+c$（a, b, c 为常数，$a\neq0$）的自变量 x 的取值范围.

选学 **2.** 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$，当 $x=2$ 时，函数值是 3；当 $x=-2$ 时，函数值是 2；当 $x=4$ 时，函数值也是 2. 求这个二次函数的表达式.

作业题 ZUOYETI

A **1.** 下列函数中，哪些是二次函数？

（1）$y=x^2-2$.　　（2）$y=2x-3$.

（3）$y=x^2-\sqrt{2}x+1$.　　（4）$y=(x-5)^2-x^2$.

（5）$y=(x-1)(x+3)$.

2. 写出下列二次函数的二次项系数、一次项系数和常数项.

二次函数	二次项系数	一次项系数	常数项
$y=x^2+2x-1$			
$y=x^2$			
$y=-3x^2+2$			
$y=\frac{1}{3}(x-5)^2-4$			

3. 从半径为 4 cm 的圆中挖去一个半径为 x(cm)的同心圆，剩下的圆环的面积为 y(cm²). 求 y 关于 x 的函数表达式和自变量 x 的取值范围，并填写下表.

x (cm)	0.5	1	1.5	2	3	3.5
y (cm²)		15π				

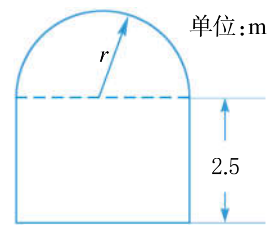
4. 已知二次函数 $y=ax^2+4x+c$，当 $x=-2$ 时，函数值是 -1；当 $x=1$ 时，函数值是 5. 求这个二次函数的表达式.

B 5. 某工厂 1 月份的产值为 200 万元，平均每月产值的增长率为 x. 求该工厂第一季度的产值 y 关于 x 的函数表达式.

6. 已知一隧道的截面如图所示，它的上部是一个半圆，下部是一个矩形，且矩形的一条边长为 2.5 m. 求：

(1) 隧道截面的面积 $S(\mathrm{m}^2)$ 与截面上部半圆的半径 $r(\mathrm{m})$ 之间的函数表达式.

(2) 当 $r=2\,\mathrm{m}$ 时，隧道截面的面积（精确到 $0.1\,\mathrm{m}^2$）.



（第 6 题）

选学

C 7. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$，当 $x=1$ 时，$y=2$；当 $x=-2$ 时，$y=-7$；当 $x=-1$ 时，$y=0$. 求这个二次函数的表达式.

1·2 二次函数的图象

铅球推出后沿着怎样的一条曲线运动？你能用二次函数的表达式来描述这条曲线吗？

1

按下列步骤用描点法画二次函数 $y=x^2$ 的图象.

1. 完成自变量与函数的对应值表.

表 1–2

x	…	-3.5	-3	-2	-1	0	1	2	3	3.5	…
y	…					0	1				…

2. 建立适当的直角坐标系，并以表中各组对应值作为点的坐标，在直角坐标系中描出相应的点.

3. 用光滑曲线顺次连结各点. 你得到类似图 1-3 的图象了吗?

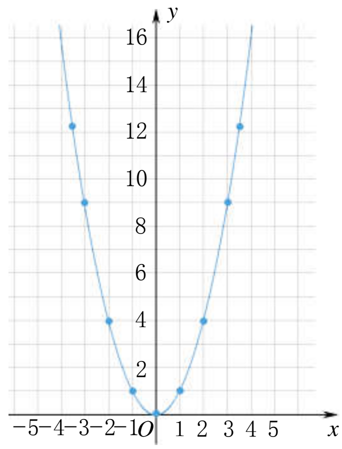


图 1-3

回顾上述过程，总结在取对应值、描点等方面有哪些有用的经验和体会.

观察所画的图象，可以看到，二次函数 $y=x^2$ 的图象是一条关于 y 轴对称、过坐标原点并向上伸展的曲线，像这样的曲线叫做**抛物线**(parabola). 抛物线与它的对称轴的交点叫做抛物线的**顶点**. 例如，抛物线 $y=x^2$ 的顶点是坐标原点.

对于二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$，是否都有类似的图象呢? 下面我们在同一直角坐标系中画二次函数 $y=2x^2$ 与 $y=-2x^2$ 的图象.

1. 列自变量 x 与函数 y 的对应值表.

表 1–3

x	…	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	…
$y=2x^2$	…	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	…
$y=-2x^2$	…	−4.5	−2	−0.5	0	−0.5	−2	−4.5	…

2. 描点，并用光滑曲线顺次连结各点，即可得到函数 $y=2x^2$ 与 $y=-2x^2$ 的图象(图 1-4).

想一想

二次函数 $y=2x^2$ 的图象与 $y=-2x^2$ 的图象关于什么对称？如果已知 $y=ax^2\ (a\neq0)$ 的图象，你认为可怎样更方便地得到 $y=-ax^2$ 的图象？

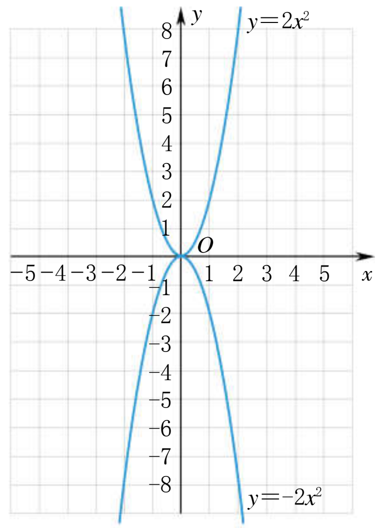


图 1-4

一般地，二次函数 $y=ax^2\ (a\neq0)$的图象具有以下特征：

二次函数 $y=ax^2\ (a\neq0)$的图象是一条抛物线，它关于 y 轴对称，顶点是坐标原点. 当 $a>0$ 时，抛物线的开口向上，顶点是抛物线的最低点；当 $a<0$ 时，抛物线的开口向下，顶点是抛物线的最高点.

例1 已知二次函数 $y=ax^2\ (a\neq0)$的图象经过点$(-2,-3)$.

（1）求 a 的值，并写出这个二次函数的表达式.

（2）说出这个二次函数图象的顶点坐标、对称轴、开口方向和图象的位置.

解 （1）把点$(-2,-3)$的坐标代入 $y=ax^2$，得$-3=a(-2)^2$，

解得 $a=-\dfrac{3}{4}$.

所以这个二次函数的表达式是 $y=-\dfrac{3}{4}x^2$.

（2）顶点为$(0,0)$，对称轴为 y 轴.

因为 $a=-\dfrac{3}{4}<0$，所以这个二次函数图象的开口向下，顶点是图象上的最高点，图象在 x 轴的下方（除顶点外）.

课内练习 KENEILIANXI

1. 在同一坐标系中画出下列二次函数的图象.

(1) $y=\frac{1}{2}x^2$.　　(2) $y=-\frac{1}{2}x^2$.

2. 若抛物线 $y=ax^2\ (a\neq0)$过点$(-1,3)$,则 a 的值是________,对称轴是________,开口______,顶点坐标是__________,顶点是抛物线上的________,抛物线在 x 轴的______方(除顶点外).

作业题 ZUOYETI

A 1. 在同一坐标系中,用描点法画出下列函数的图象.

(1) $y=\frac{5}{4}x^2$.　　(2) $y=-\frac{5}{4}x^2$.

2. 已知二次函数 $y=ax^2\ (a\neq0)$的图象过点$(-2,6)$,有下列点:

$\left(1,\frac{3}{2}\right)$, $\left(-1,\frac{3}{2}\right)$, $\left(1,-\frac{3}{2}\right)$, $(2,8)$, $(\sqrt{2},3)$.

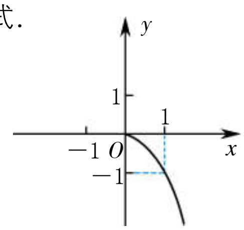
其中哪些点在图象上,哪些点不在图象上?请说明理由.

3. 已知二次函数 $y=ax^2\ (a\neq0)$的图象经过点$(-3,6)$.

(1) 求 a 的值,并写出这个二次函数的表达式.

(2) 说出这个二次函数的顶点坐标、对称轴、开口方向和图象的位置.

4. 已知二次函数 $y=ax^2\ (a\neq0)$的图象的一部分(如图),利用轴对称,将 $y=ax^2\ (a\neq0)$的图象补画完整.



(第 4 题)

B 5. 已知函数 $y=ax^2\ (a\neq0)$与$y=\frac{-2}{x}$的图象交点的横坐标大于零,则 a 是大于零还是小于零?

6. 跳伞运动员在打开降落伞之前,下落的路程 s(米)与所经过的时间 t(秒)之间的关系为 $s=at^2$.

t(秒)	0	1	2	3	4	…
s(米)	0		20			…

（1）根据表中的数据，写出 s 关于 t 的函数表达式.

（2）完成上面自变量 t 与函数 s 的对应值表.

（3）画出 s 关于 t 的函数图象.

（4）如果跳伞运动员从 4 600 米的高空跳伞，为确保安全，必须在离地面 600 米之前打开降落伞. 问：运动员在空中不打开降落伞的时间至多有几秒（精确到 1 秒）？

PROJECT 设计题 SHEJITI

当一个物体自由地沿着斜面作直线运动时，路程 s 与时间 t 有怎样的关系？请设计一个实验探讨这一问题，并写一份实验报告，介绍实验的过程和所获得的结果.

2

合作学习 HEZUOXUEXI

1. 在同一直角坐标系中画出函数 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=\frac{1}{2}(x+2)^2$，$y=\frac{1}{2}(x-2)^2$ 的图象（用描点法，或应用绘图软件）.

2. 比较所画三个函数的图象（图 1-5），它们有什么共同的特征？顶点坐标和对称轴有什么关系？图象之间的位置有什么关系？由此，你发现了什么？

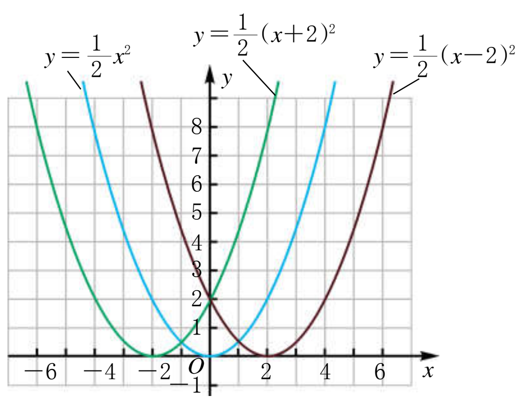


图 1-5

一般地，函数 $y=a(x-m)^2\ (a\neq 0)$ 的图象与函数 $y=ax^2$ 的图象只是位置不同，它可由 $y=ax^2$ 的图象向右（当 $m>0$）或向左（当 $m<0$）平移 $|m|$ 个单位得到. 函数 $y=a(x-m)^2$ 的图象的顶点坐标是 $(m,0)$，对称轴是直线 $x=m$.

例2 对于二次函数 $y=-\frac{1}{3}(x-4)^2$，请回答下列问题：

（1）怎样平移函数 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 的图象，就能得到函数 $y=-\frac{1}{3}(x-4)^2$ 的图象？

（2）说出函数 $y=-\frac{1}{3}(x-4)^2$ 的图象的顶点坐标和对称轴.

解 （1）函数 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 的图象向右平移 4 个单位，就得到函数 $y=-\frac{1}{3}(x-4)^2$ 的图象（图 1-6）.

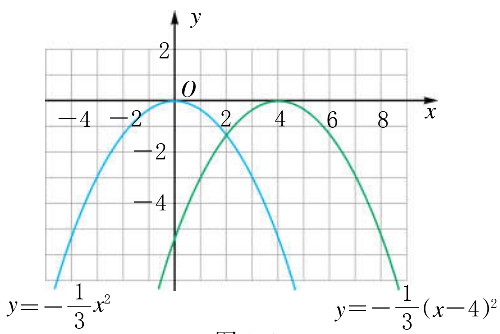


图 1-6

（2）函数 $y=-\frac{1}{3}(x-4)^2$ 的图象的顶点坐标是 $(4,0)$，对称轴是直线 $x=4$.

现在我们在同一直角坐标系中画出函数 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=\frac{1}{2}(x+2)^2$，$y=\frac{1}{2}(x+2)^2+3$ 的图象，如图 1-7.

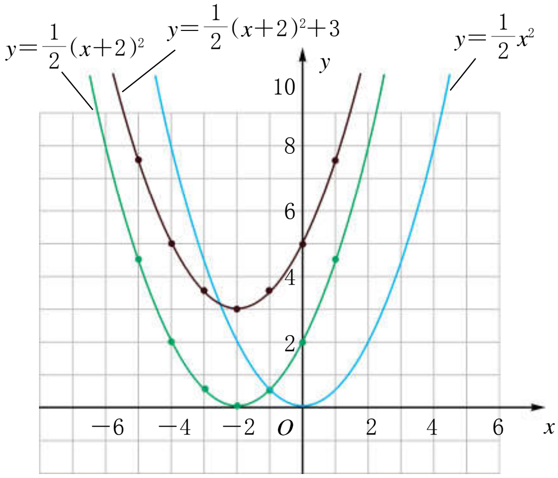


图 1-7

从图 1-7 中可以看出,只要把函数 $y=\frac{1}{2}(x+2)^2$ 的图象向上平移 3 个单位,就得到函数 $y=\frac{1}{2}(x+2)^2+3$ 的图象. 因此,只要把函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象先向左平移 2 个单位,再向上平移 3 个单位,就得到函数 $y=\frac{1}{2}(x+2)^2+3$ 的图象.

做一做 ZUOYIZUO

填写下表:

二次函数	图象的对称轴	图象的顶点坐标
$y=\frac{1}{2}x^2$	直线 $x=0$,即 y 轴	(0,0)
$y=\frac{1}{2}(x+2)^2$		
$y=\frac{1}{2}(x+2)^2+3$		

一般地,函数 $y=a(x-m)^2+k$ $(a\neq 0)$的图象,可以由函数 $y=ax^2$ 的图象先向右(当 $m>0$)或向左(当 $m<0$)平移 $|m|$ 个单位,再向上(当 $k>0$)或向下(当 $k<0$)平移 $|k|$ 个单位得到,顶点是(m,k),对称轴是直线 $x=m$.

课内练习 KENEILIANXI

1. 填空：

（1）函数 $y=2(x+1)^2$ 的图象，可以由抛物线________向______平移 1 个单位得到.

（2）函数 $y=-\frac{2}{3}(x-7)^2$ 的图象，可以由抛物线___________向右平移________个单位得到.

（3）抛物线 $y=3(x-2)^2+\frac{1}{2}$ 可以由抛物线__________先向右平移 2 个单位，再向____平移 $\frac{1}{2}$ 个单位得到.

2. 说出下列函数图象的开口方向、对称轴和顶点坐标.

（1）$y=5(x+2)^2-3$.　　（2）$y=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+7$.

（3）$y=3x^2-6$.　　（4）$y=2-(x+2)^2$.

作业题 ZUOYETI

A

1. 在同一坐标系中画出函数 $y=x^2$，$y=(x+3)^2$，$y=(x-3)^2$ 的图象，并回答下列问题(填空).

（1）函数 $y=(x+3)^2$ 的图象，可以由函数 $y=x^2$ 的图象向____平移____个单位得到.

（2）函数 $y=x^2$ 的图象，可以由函数 $y=(x-3)^2$ 的图象向____平移____个单位得到.

（3）函数 $y=(x-3)^2$ 的图象，可以由函数 $y=(x+3)^2$ 的图象向____平移____个单位得到.

2. 下列函数的图象可由怎样的抛物线 $y=ax^2$ ($a\neq0$)经过怎样的平移得到?

（1）$y=4(x+1)^2$.

（2）$y=-3(x-\sqrt{2})^2+1$.

（3）$y=2(x+5)^2+2\sqrt{3}$.

3. 说出下列抛物线的开口方向、顶点坐标和对称轴.

（1）$y=1-3x^2$.　　（2）$y=2(x-1)^2-7$.

（3）$s=3(t+6)^2+5$.　　（4）$y=\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+3$.

B **4.** 已知点(2,7)在函数 $y=ax^2+b$ 的图象上，且当 $x=-\sqrt{3}$ 时，$y=5$.

(1) 求 a,b 的值.

(2) 如果点 $\left(\frac{1}{2},m\right)$，$(n,17)$也在这个函数的图象上，求 m 与 n 的值.

5. 已知一个二次函数图象的形状与抛物线 $y=4x^2$ 相同，它的顶点坐标是(2,4)，求该二次函数的表达式.

3

对于二次函数的一般形式 $y=ax^2+bx+c\,(a\neq0)$，我们通过变形，可以将其转化为 $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\,(a\neq0)$. 由此可见，函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与函数 $y=ax^2$ 的图象的形状、开口方向均相同，只是位置不同，可以通过平移 $y=ax^2$ 的图象得到.

一般地，函数 $y=ax^2+bx+c\,(a\neq0)$的图象有以下性质：

二次函数 $y=ax^2+bx+c\,(a\neq0)$的图象是一条抛物线，它的对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. 当 $a>0$ 时，抛物线的开口向上，顶点是抛物线上的最低点；当 $a<0$ 时，抛物线的开口向下，顶点是抛物线上的最高点.

例3　求抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}$ 的对称轴和顶点坐标.

解　$\because$　$a=-\frac{1}{2}$，$b=3$，$c=-\frac{5}{2}$，

$$\therefore\quad -\frac{b}{2a}=-\frac{3}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=3,\ \frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{5}{2}\right)-3^2}{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=2.$$

因此，抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}$ 的对称轴是直线 $x=3$，顶点坐标是(3,2).

做一做 ZUOYIZUO

说出下列抛物线的开口方向、顶点坐标和对称轴.

（1）$y=-\frac{5}{4}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{4}$.　　（2）$y=2x^2-2\sqrt{2}x-3$.

例4　已知函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-3$，回答下列问题：

（1）函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-3$ 的图象能否由函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象通过平移得到？若能，请说出平移的过程，并画出示意图.

（2）说出函数图象的开口方向、对称轴和顶点坐标.

解　原函数可以化为 $y=-\frac{1}{2}(x-4)^2+5$.

（1）函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-3$的图象可由函数$y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象先向右平移 4 个单位，再向上平移 5 个单位得到. 示意图如图1-8.

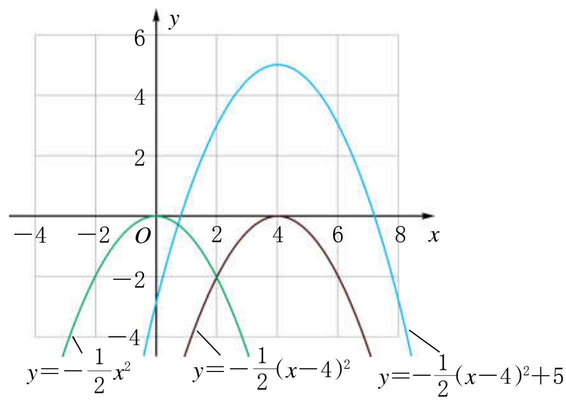


图 1-8

（2）函数图象的开口方向向下，对称轴是直线 $x=4$，顶点坐标是(4，5).

课内练习 KENEILIANXI

1. 求下列函数图象的对称轴和顶点坐标.

（1）$y=2(x-1)(x+2)$.　　（2）$y=2x\left(\frac{1}{2}-x\right)+3$.

2. 说出下列函数的图象可由怎样的抛物线 $y=ax^2\ (a\neq0)$经过怎样

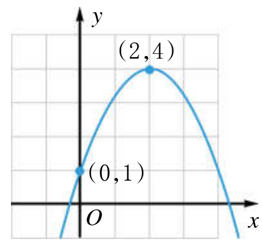
的平移后得到？

（1）$y=4(x+1)^2$.

（2）$y=-3(x-\sqrt{2})^2+1$.

（3）$y=-2x^2-10x+3$.

（4）$y=-2x^2+2\sqrt{3}x$.



3. 写出如图所示抛物线的函数表达式.

（第3题）

探究活动 TANJIUHUODONG

如图1-9为一座拱桥的示意图，当水面宽为12 m时，桥洞顶部离水面4 m. 已知桥洞的拱形是抛物线，要求该抛物线的函数表达式，你认为首先要做的工作是什么？以水平方向为 x 轴，取以下三个不同的点为坐标原点建立直角坐标系.

（1）点 A.（2）点 B.（3）抛物线的顶点 C.

所得的函数表达式相同吗？请试一试.哪一种取法求得的函数表达式最简单？

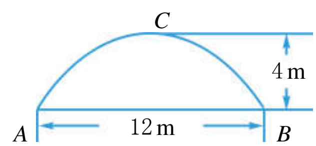


图1-9

作业题 ZUOYETI

A **1.** 求下列函数图象的对称轴和顶点坐标.

（1）$y=-x^2-2x+3$.

（2）$y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$.

（3）$y=0.6x^2+0.3x-1$.

2. 下列函数的图象可由怎样的抛物线 $y=ax^2\ (a\neq 0)$ 经过怎样的平移后得到？

（1）$y=3(x-2)^2$.（2）$y=-(x+2)^2+6$.

（3）$y=-3x^2-12x+5$.（4）$y=2x^2+\sqrt{5}x-3$.

3. 已知二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象经过点 $A(-1,12)$，$B(2,-3)$.

（1）求这个二次函数的表达式.

（2）求这个图象的顶点坐标和对称轴.

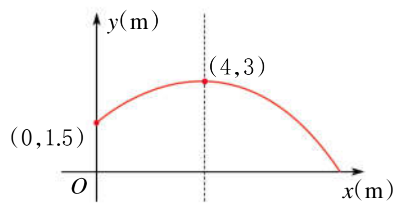
（3）画出这个函数的图象.

B **4.** 已知抛物线 $y=-2x^2+bx+c$ 的顶点坐标为 $(1,2)$. 求 b，c 的值，并写出这个抛物线的函数表达式.

5. 一运动员推铅球，铅球经过的路线为如图所示的抛物线.

（1）求铅球所经过路线的函数表达式和自变量的取值范围.

（2）铅球的落地点离运动员有多远（精确到 0.01 m）？



（第 5 题）

阅读材料 YUEDUCAILIAO

探索函数 $y=ax^2+bx+c$ 的系数 a，b，c 与图象的关系

很多数学软件都具有绘图功能，可以方便地绘制动态函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，并通过改变系数 a，b，c 的值来探索二次函数系数 a，b，c 与图象的关系.

（一）绘制动态二次函数的图象.

1. 用“绘图(G)”菜单中的“定义坐标系(D)”功能建立直角坐标系，在 x 轴的正半轴上取可以任意移动的三点 A，B，C，并用“度量(M)”中的“横坐标(x)”功

能分别测出A,B,C三点的横坐标x_A,x_B,x_C（如图1-10），将它们分别作为二次函数$y=ax^2+bx+c$的系数a,b,c.

2. 在“绘图(G)”菜单中选择“绘制新函数(F)”，然后在弹出对话框“新建函数”中输入“x_A*x^2+x_B*x+x_C”(图1-11)，点击“确定”，屏幕上便自动生成函数$f(x)=x_A\cdot x^2+x_B\cdot x+x_C$，即$y=ax^2+bx+c$（其中$y=f(x),a=x_A,b=x_B,c=x_C$）的图象，如图1-12.

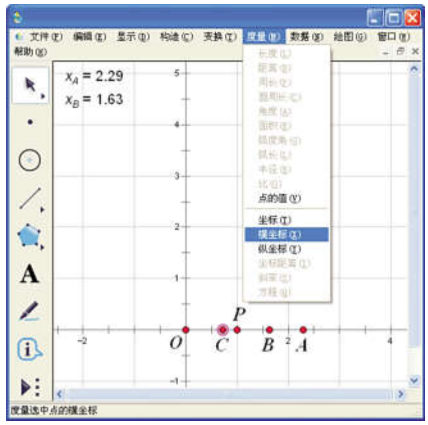


图 1-10

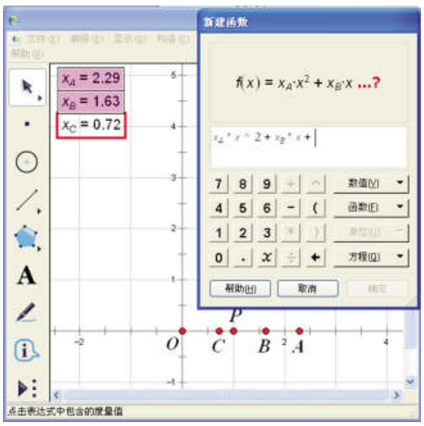


图 1-11

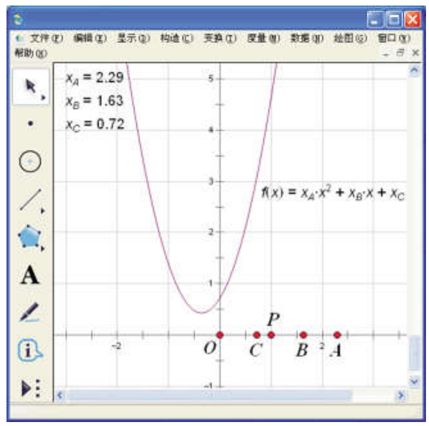


图 1-12

（二）探索函数$y=ax^2+bx+c$的系数a,b,c与图象的关系.

1. 系数a与抛物线开口方向及开口大小的关系.

拖动点A，使点A在x轴上左右移动，观察点A的横坐标x_A值的变化及相应函数$f(x)=x_A\cdot x^2+x_B\cdot x+x_C$图象的变化，你有什么发现？总结你发现的规律.

2. 系数c与抛物线和y轴交点的位置关系.

拖动点C，观察点C的横坐标x_C值的变化及相应函数$f(x)=x_A\cdot x^2+x_B\cdot x+x_C$图象与$y$轴交点的位置变化，你有什么发现？

3. 尝试自己提一个问题，如系数a,b与抛物线对称轴的位置关系，b^2-4ac的符号与抛物线和x轴的位置关系等，并加以研究.

1·3 二次函数的性质

运动员投篮后，篮球运动的路线是一条怎样的曲线？怎样计算篮球达到最高点时的高度？

观察图 1-13，图 1-14 中二次函数的图象，回答下列问题：

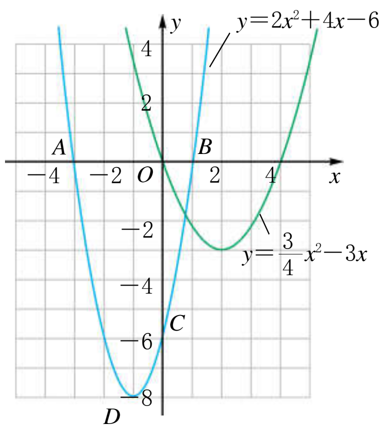


图 1-13

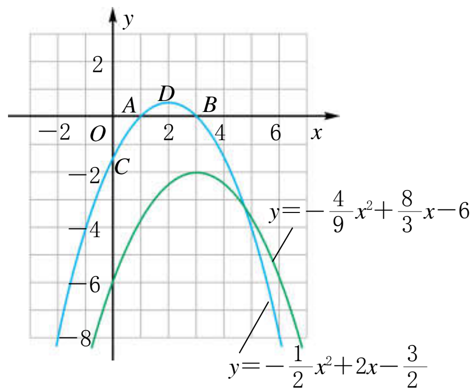


图 1-14

（1）当自变量增大时，函数的值将怎样变化？顶点是图象的最高点还是最低点？

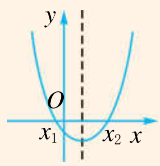
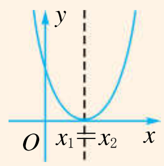
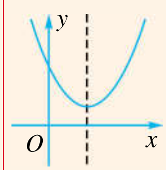
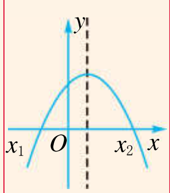
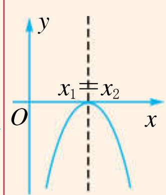
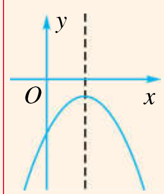
（2）判别这些函数有没有最大值或最小值[1]，是由表达式中哪一个系数决定的？

（可与你的同伴交流）

[1] 在自变量的取值范围内，函数值满足 $y\leqslant M$（或 $y\geqslant M$），且等号能成立，我们就说函数有最大值 M（或最小值 M）。

一般地，二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 有以下性质：

表 1–4

条件	图象			增减性	最大(小)值
	$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$		
$a>0$				当 $x\leqslant -\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小； 当 $x\geqslant -\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大.	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 达到最小值：$y=\frac{4ac-b^2}{4a}$；无最大值.
$a<0$				当 $x\leqslant -\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大； 当 $x\geqslant -\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小.	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 达到最大值：$y=\frac{4ac-b^2}{4a}$；无最小值.

在实际应用时，我们往往只要根据二次函数的表达式画出大致图象(包括确定顶点、对称轴、与 x 轴的交点)，就能得到这个二次函数的有关性质.

例 已知函数 $y=-\frac{1}{2}x^2-7x+\frac{15}{2}$.

(1) 求函数图象的顶点坐标、对称轴，以及图象与坐标轴的交点坐标，并画出函数的大致图象.

(2) 自变量 x 在什么范围内时，y 随 x 的增大而增大？何时 y 随 x 的增大而减小？并求出函数的最大值或最小值.

解 (1) $\because\ a=-\frac{1}{2},b=-7,c=\frac{15}{2}$,

$\therefore\ -\frac{b}{2a}=-7,\ \frac{4ac-b^2}{4a}=32.$

所以函数的顶点坐标是$(-7,32)$，对称轴是直线 $x=-7$.

由 $x=0$，得 $y=\frac{15}{2}$，所以图象与 y 轴的交点是 $\left(0,\frac{15}{2}\right)$.

由 $y=0$，得 $-\frac{1}{2}x^2-7x+\frac{15}{2}=0$，

解得 $x_1=-15$，$x_2=1$.

所以图象与 x 轴的交点是 $(-15,0)$，$(1,0)$.

函数 $y=-\frac{1}{2}x^2-7x+\frac{15}{2}$ 的大致图象如图 1-15.

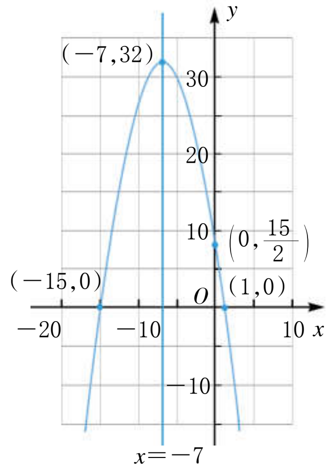


图 1-15

（2）由图 1-15 可知，当 $x\leqslant-7$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x\geqslant-7$ 时，y 随 x 的增大而减小. 当 $x=-7$ 时，函数 y 有最大值 32.

想一想，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 与函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 有什么关系？

课内练习 KENEILIANXI

1. 已知函数 $y=x^2-3x-4$.

（1）求函数图象的顶点坐标、对称轴和与坐标轴交点的坐标，并画出函数的大致图象.

（2）记当 $x_1=1.5$，$x_2=-\sqrt{2}$，$x_3=\sqrt{2}$ 时对应的函数值分别为 y_1，y_2，y_3，试比较 y_1，y_2，y_3 的大小.

2. 求下列函数的最大值（或最小值）和对应的自变量的值.

（1）$y=2x^2-8x+1$.　　（2）$y=-3x^2-5x+1$.

作业题 ZUOYETI

A **1.** 已知二次函数 $y=-2x^2+4x+6$.

（1）求函数图象的顶点坐标、对称轴和与坐标轴交点的坐标，并画出函数的大致图象.

（2）自变量 x 在什么范围内时，y 随 x 的增大而增大？何时 y 随 x 的增大而减小？并求函数的最大值或最小值.

2. 求下列函数的最大值(或最小值)和对应的自变量的值.

(1) $y=x^2-4x+5$. (2) $y=-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x+2$.

3. 已知$(-1,y_1)$,$(-2,y_2)$,$(-4,y_3)$是抛物线$y=-2x^2-8x+m$上的点,则( )

(A) $y_1<y_2<y_3$. (B) $y_3<y_2<y_1$.

(C) $y_2>y_1>y_3$. (D) $y_2>y_3>y_1$.

4. 求下列二次函数的图象与x轴交点的坐标.

(1) $y=\frac{2}{3}x^2-6x$. (2) $y=-2x^2-3x+2$.

B 5. 根据下列条件,分别求二次函数的表达式.

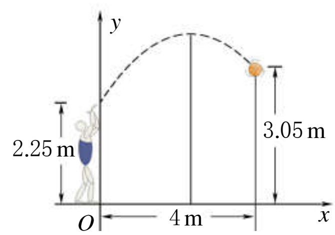
(1) 已知图象的顶点坐标为$(-1,-8)$,且过点$(0,-6)$.

(2) 已知图象经过点$(3,0)$,$(2,-3)$,并以直线$x=0$为对称轴.

6. 篮球运动员投篮后,球运动的路线为抛物线的一部分(如图),抛物线的对称轴为直线$x=2.5$. 求:

(1) 球运动路线的函数表达式和自变量的取值范围.

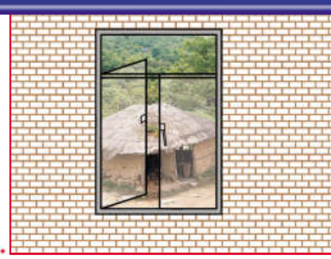
(2) 球在运动中离地面的最大高度.



(第 6 题)

1·4 二次函数的应用

用长为 8 米的铝合金制成如图窗框,窗框的宽和高各为多少米时,窗户的透光面积最大?最大面积是多少?



1

在日常生活和生产实际中,二次函数的性质有着许多应用.

例1 图 1-16 中窗户边框的上部分是由 4 个全等扇形组成的半圆，下部分是矩形（图 1-17）. 如果制作一个窗户边框的材料的总长度为 6 m，那么如何设计这个窗户边框的尺寸，使透光面积最大（结果精确到 0.01 m）？

图 1-16

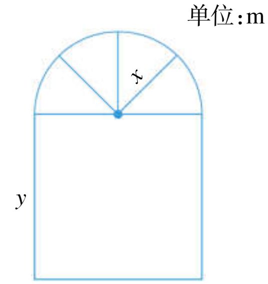


图 1-17

解 如图 1-17，设半圆的半径为 x（m），窗框矩形部分的另一边长为 y（m），根据题意，有 $5x+\pi x+2x+2y=6$，即 $y=3-\frac{1}{2}(\pi+7)x$.

$\because\ y>0$，

$\therefore\ 3-\frac{1}{2}(\pi+7)x>0$，

解得 $0<x<\frac{6}{\pi+7}$.

$$\therefore\ S=\frac{\pi}{2}x^2+2xy$$
$$=\frac{\pi}{2}x^2+2x\left[3-\frac{1}{2}(\pi+7)x\right]$$
$$=\left(-\frac{\pi}{2}-7\right)x^2+6x\ \left(0<x<\frac{6}{\pi+7}\right).$$

$\because\ a=\left(-\frac{\pi}{2}-7\right)<0, b=6, c=0$，

又 $\because\ x=-\frac{b}{2a}=\frac{6}{\pi+14}$，且 $\frac{6}{\pi+14}$ 在 $0<x<\frac{6}{\pi+7}$ 的范围内，

$\therefore$ 当 $x=\frac{6}{\pi+14}\approx 0.35$ 时，$S_{最大值}=\frac{4ac-b^2}{4a}\approx 1.05$. 此时，$y\approx 1.23$.

答：当窗户半圆的半径约为 0.35 m，窗框矩形部分的另一边长约为 1.23 m 时，窗户的透光面积最大，最大值约为 1.05 m^2.

运用二次函数求实际问题中的最大值或最小值，首先应当求出函数表达式和自变量的取值范围，然后通过配方变形，或利用公式求它的最大值或最小值. 值得注意的是，由此求得的最大值或最小值对应的自变量的值必须在自变量的取值范围内.

课内练习 KENEILIANXI

1. 请解答本节节前语中的问题.

2. 已知直角三角形的两直角边的和为 2，求斜边长可能达到的最小值，以及当斜边长达到最小值时两条直角边的长.

作业题 ZUOYETI

A

1. 求下列二次函数的最大值或最小值：

（1）$y=x^2-4x+7$.　　　　（2）$y=-5x^2+8x-1$.

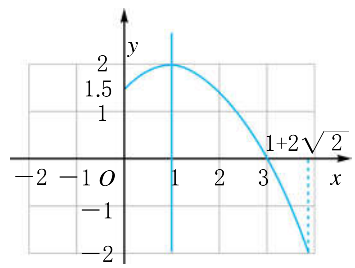
2. 已知二次函数的图象($0\leqslant x\leqslant 1+2\sqrt{2}$)如图. 关于该函数在所给自变量的取值范围内，下列说法正确的是(　　)

（A）有最大值 2，无最小值.

（B）有最大值 2，有最小值 1.5.

（C）有最大值 2，有最小值 -2.

（D）有最大值 1.5，有最小值 -2.

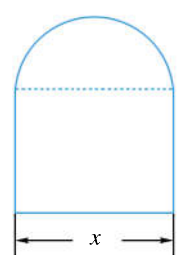


（第 2 题）

3. 把一根长 1 m 的铅丝折成一个矩形，并使矩形的面积最大，应怎样折？最大面积是多少？

B

4. 如图，隧道横截面的下部是矩形，上部是半圆，周长为 16 m. 求截面积 S(m^2)关于底部宽 x(m)的函数表达式. 当底部宽为多少时，隧道的截面积最大(结果精确到 0.01 m)？



（第 4 题）

5. 有一张边长为 10 cm 的正三角形纸板，若要从中剪一个面积最大的矩形纸板，应怎样剪？最大面积为多少？

下面我们再看几个运用有关二次函数知识解决实际问题的例子.

例2 如图 1-18,B 船位于 A 船正东 26 km 处. 现在 A,B 两船同时出发,A 船以 12 km/h 的速度朝正北方向行驶,B 船以 5 km/h 的速度朝正西方向行驶. 何时两船相距最近? 最近距离是多少?

分析 设经过 t(h)后,A,B 两船分别到达 A',B'处(图 1-18),则两船之间的距离为

$$A'B'=\sqrt{AB'^2+AA'^2}$$
$$=\sqrt{(26-5t)^2+(12t)^2}$$
$$=\sqrt{169t^2-260t+676}.$$

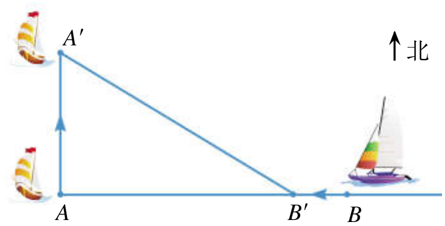


图 1-18

由此,本题可化归为求 $169t^2-260t+676$ 的最小值.

解 设经过 t(h)后,A,B 两船分别到达 A',B'处,则

$$A'B'=\sqrt{AB'^2+AA'^2}=\sqrt{(26-5t)^2+(12t)^2}=\sqrt{169t^2-260t+676}$$
$$=\sqrt{(13t-10)^2+576}\ (t>0).$$

当 $13t-10=0$,即 $t=\dfrac{10}{13}$时,$(13t-10)^2+576$ 有最小值 576,

所以当 $t=\dfrac{10}{13}$ h 时,$A'B'=\sqrt{576}=24$(km).

答:经过$\dfrac{10}{13}$ h,两船之间的距离最近,最近距离为 24 km.

例3 某超市销售一种饮料,每瓶进价为 9 元. 经市场调查表明,当售价在 10 元到 14 元之间(含 10 元,14 元)浮动时,每瓶售价每增加 0.5 元,日均销售量减少 40 瓶;当售价为每瓶 12 元时,日均销售量为 400 瓶. 问:销售价格定为每瓶多少元时,所得日均毛利润(每瓶毛利润=每瓶售价-每瓶进价)最大? 最大日均毛利润为多少元?

分析 如果我们能够建立起日均毛利润与销售价之间的函数关系,那么就可以根据函数的性质来确定售价定为多少时日均毛利润达到最大,这

个最大值是多少. 如果设这种饮料的售价为每瓶 x 元,日均毛利润为 y 元,根据题意,知日均销售量为

$$400-40[(x-12)\div 0.5]=1\,360-80x,$$

$$\therefore \quad y=(x-9)(1\,360-80x).$$

这样,问题就化归为求一个二次函数何时达到最大值,最大值是多少的问题.

解 设售价为每瓶 x 元时,日均毛利润为 y 元. 由题意,得

$$y=(x-9)(1\,360-80x)$$
$$=-80x^2+2\,080x-12\,240\ (10\leqslant x\leqslant 14).$$

$-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2\,080}{2\times(-80)}=13$,在 $10\leqslant x\leqslant 14$ 的范围内.

所以当 $x=13$ 时,

$y_{最大值}=-80\times 13^2+2\,080\times 13-12\,240=1\,280$(元).

答:售价定为每瓶 13 元时,所得日均毛利润最大,最大日均毛利润为 1 280 元.

课内练习 KENEILIANXI

某大棚内种植西红柿,经过试验,其单位面积的产量与这个单位面积种植的株数构成一种函数关系. 每平方米种植 4 株时,平均单株产量为 2 kg;以同样的栽培条件,每平方米种植的株数每增加 1 株,单株产量减少 $\dfrac{1}{4}$ kg. 问:每平方米种植多少株时,能获得最大的产量?最大产量为多少?

作业题 ZUOYETI

A 1. 一个斜抛物体的水平运动距离记为 x(m),对应的高度记为 h(m),h 是关于 x 的二次函数. 已知当 $x=0$ 时,$h=2$;当 $x=30$ 时,$h=0$;当 $x=10$ 时,$h=22$.

(1) 求 h 关于 x 的函数表达式和自变量的取值范围.

(2) 求斜抛物体的最大高度和达到最大高度时的水平距离(精确到 1 m).

2. 汽车刹车后，还会继续向前滑行一段距离，这段距离称为“刹车距离”．刹车距离 y(m)与刹车时的车速 x(km/h)有以下关系式：$y=ax^2+bx$（a,b 为常数，且 $a\neq 0$）．对某辆车测试结果如下：当车速为 100 km/h 时，刹车距离 y 为 21m；当车速为 150 km/h 时，刹车距离 y 为 46.5 m．该车在限速 120 km/h 的高速公路上行驶时出了事故，事后测得它的刹车距离为 40.6 m．问：该车在发生事故时是否超速行驶？

3. 已知 $x=2t-5$，$y=10-t$，$S=xy$．求 S 的最大值或最小值，以及相应 t 的值．

B **4.** 上午 8:00，某台风中心在 A 城正南方向的 200 km 处，以 25 km/h的速度向 A 城移动．此时有一辆卡车从 A 城以 100 km/h 的速度向正西方向行驶．问：何时这辆卡车与台风中心的距离最近？当距离最近时台风中心与这辆卡车分别位于何处？

C **5.** 一次足球训练中，一球员从球门正前方 10 m 处将球射向球门，球射向球门的路线呈抛物线．当球飞行的水平距离为 6 m 时，球达到最高点，此时球离地面 3 m．已知球门高是 2.44 m，问：球能否射入球门？

3

例4 一个球从地面竖直向上弹起时的速度为 10 m/s，经过 t(s)时球的高度为 h(m)．已知物体竖直上抛运动中，$h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$（v_0 表示物体运动上弹开始时的速度，g 表示重力系数，取 $g=10\text{ m/s}^2$）．问：球从弹起至回到地面需多少时间？经多少时间球的高度达到 3.75 m？

分析 根据已知条件，我们容易写出 h(m)关于 t(s)的二次函数表达式 $h=10t-5t^2$，并画出函数的大致图象（图 1-19）．从图象我们可以看到，图象与横轴的两个交点分别为(0，0)，(2，0)，它们的横坐标分别为 0 与 2，就是球从地面弹起和回到地面的时刻，此时 $h=0$，所以这两个时刻也就是一元二次方程 $10t-5t^2=0$ 的两个根．这两个时刻的差就是球从地面弹起至回到地面所需的时间．

同样，我们只要取 $h=3.75$ m（图 1-19），得一元二次方程 $10t-5t^2=3.75$，

求出它的根，就得到球达到 3.75 m 高度时所经过的时间.

解 由题意，得 h(m)关于 t(s)的二次函数表达式为 $h=10t-5t^2$.

取 $h=0$，得一元二次方程 $10t-5t^2=0$，

解这个方程，得 $t_1=0$，$t_2=2$.

所以球从地面弹起至回到地面所需的时间为 $t_2-t_1=2$(s).

取 $h=3.75$，得一元二次方程 $10t-5t^2=3.75$，

解这个方程，得 $t_1=0.5$，$t_2=1.5$.

答：球从弹起至回到地面需 2 s，经过 0.5 s 或 1.5 s 球的高度达到 3.75 m.

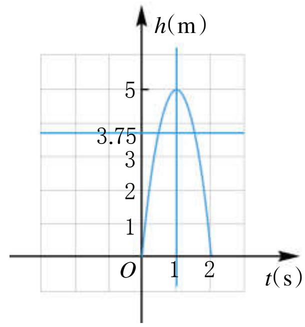


图 1-19

从上例我们看到，可以利用解一元二次方程求二次函数的图象与横轴（或平行于横轴的直线）的交点坐标. 反过来，也可以利用二次函数的图象求一元二次方程的解.

例5 利用二次函数的图象求方程 $x^2+x-1=0$ 的解（或近似解）.

解 设 $y=x^2+x-1$，则方程 $x^2+x-1=0$ 的解就是该函数图象与 x 轴交点的横坐标. 在直角坐标系中画出函数 $y=x^2+x-1$ 的图象（图 1-20），得到与 x 轴的交点为 A，B，则点 A，B 的横坐标 x_1，x_2 就是方程的解. 观察图 1-20，得到点 A 的横坐标 $x_1\approx0.6$，点 B 的横坐标 $x_2\approx-1.6$. 所以方程 $x^2+x-1=0$ 的近似解为 $x_1\approx0.6$，$x_2\approx-1.6$.

想一想

将 $x_1=0.6$ 和 $x_2=-1.6$ 代入 x^2+x-1，其值分别是多少？

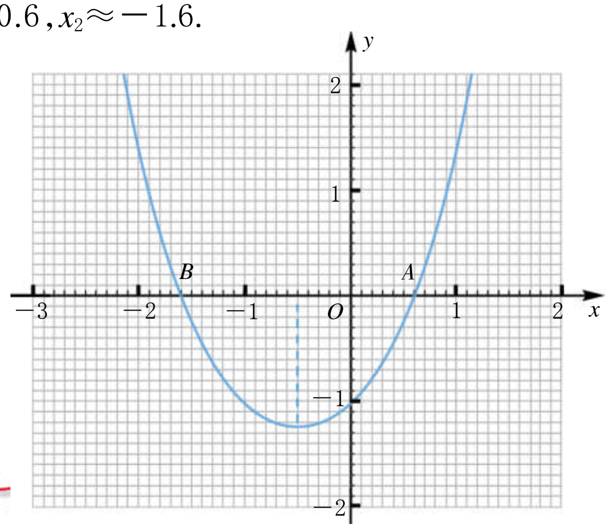


图 1-20

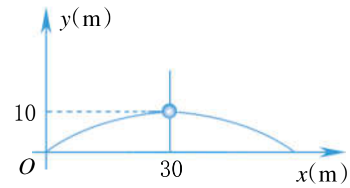
课内练习 KENEILIANXI

1. 一球从地面抛出的运动路线呈抛物线，如图. 当球离抛出地的水平距离为 30 m 时，达到最大高度 10 m.

(1) 求球运动路线的函数表达式和自变量的取值范围.

(2) 球被抛出多远?

(3) 当球的高度为 5 m 时，球离抛出地的水平距离是多少(结果精确到 0.1 m)?



(第 1 题)

2. 用求根公式求出方程 $x^2+x-1=0$ 的近似解，并由此检验例 5 所给图象解法的精确度.

3. 利用函数图象判断下列方程有没有解，有几个解. 若有解，求出它的解(精确到 0.1).

(1) $2x^2-x+1=0$.

(2) $2x^2-4x-1=0$.

作业题 ZUOYETI

A **1.** 利用函数图象判断下列方程有没有解，有几个解. 若有解，求出它的解(精确到 0.1).

(1) $\frac{1}{2}x^2-x+1=0$.

(2) $x^2-3x+1=0$.

2. 用两种不同的图解法求方程 $x^2-2x-5=0$ 的解(精确到 0.1).

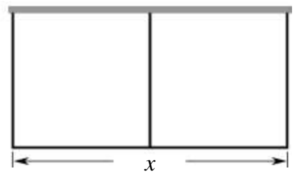
3. 某拱形门建筑的形状是抛物线. 若取拱形门地面上两点的连线为 x 轴，它可以近似地用函数 $y=-\frac{2}{97}(x-97)^2+194$ 表示(单位: m). 问: 拱形门底部大约有多宽? 有多高?

B 4. 某农场拟建两间矩形种牛饲养室，饲养室的一面靠现有墙（墙长>50 m），中间用一道墙隔开（如图）。已知计划中的建筑材料可建围墙的总长为 50 m，设两间饲养室合计长 x（m），总占地面积为 y（m^2）。

（1）求 y 关于 x 的函数表达式和自变量的取值范围。

（2）画出函数的图象。

（3）利用图象判断：若要使两间饲养室占地总面积达到 200 m^2，则各道墙的长度为多少？占地总面积有可能达到 210 m^2 吗？



（第 4 题）

C 5. 已知一个二次函数的图象与 x 轴的交点为（-2，0），（4，0），且顶点在函数 $y=2x$ 的图象上。求这个二次函数的表达式。

PROJECT 设计题 SHEJITI

由例5可知，求方程 $x^2+x-1=0$ 的解，就是求二次函数 $y=x^2+x-1$ 的图象与 x 轴交点的横坐标，如图1-20。若取 x 的值为 x_1，x_2，$x_1<x_2$，使得函数值 y_1，y_2 满足 $y_1 \cdot y_2<0$，则抛物线 $y=x^2+x-1$ 与 x 轴的交点中至少有一个在（x_1，0）与（x_2，0）之间，也就是说，方程 $x^2+x-1=0$ 至少有一个解在 x_1 与 x_2 之间，由此我们可以估计方程 $x^2+x-1=0$ 的解。

（1）完成表1-5，判断方程 $x^2+x-1=0$ 的解在哪两个相邻的 x 值之间。

表 1-5

x的值	-2	-1	0	1
x^2+x-1的值				

（2）完成表1-6，估计方程 $x^2+x-1=0$ 的解，并说出所得解的精确度。

表 1-6

x的值	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1
x^2+x-1的值							

（3）若要取得更精确的解，你将如何操作？

小结

XIAOJIE

填空.

1. 形如 $y=$__________（其中 a,b,c 是常数，$a\neq0$）的函数叫做二次函数，自变量的取值范围是__________.

2. 二次函数 $y=ax^2\ (a\neq0)$ 的图象是__________，它关于________对称，顶点是______. 当 $a>0$ 时，抛物线的______向上，顶点是抛物线上的______；当 $a<0$ 时，抛物线的开口______，顶点是抛物线上的______.

函数 $y=a(x-m)^2\ (a\neq0)$ 的图象可由函数 $y=ax^2\ (a\neq0)$ 的图象向_____（当 $m>0$）或向______（当 $m<0$）平移______个单位得到.

函数 $y=a(x-m)^2+k\ (a\neq0)$ 的图象可由函数 $y=ax^2$ 的图象先向右（当 $m>0$）或向左（当 $m<0$）平移______个单位，再向上（当 $k>0$）或向下（当 $k<0$）平移______个单位得到，顶点是_________，对称轴是直线___________.

3. 二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$ 的图象是一条__________，它的对称轴是直线_________，顶点坐标是__________. 当 $a>0$ 时，抛物线的开口______，顶点是抛物线上的______；当 $a<0$ 时，抛物线的开口______，顶点是抛物线上的______.

对于二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$，若 $a>0$，则当 $x\geqslant$______时，y 随 x 的增大而增大，当 $x\leqslant$_______时，y 随 x 的增大而_________，当 $x=$_________时，$y_{最小值}=$_______；若 $a<0$，则当 $x\leqslant$_________时，y 随 x 的增大而______，当 $x\geqslant$_______时，y 随 x 的增大而减小，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$y_{最大值}=$_______.

填表.

技能内容	学会程度		
	学　会	基本学会	不　会
用描点法画二次函数的图象			
利用图象求一元二次方程的解			
求二次函数的最大值或最小值			
运用二次函数解决简单的实际问题			

目标与评定

MUBIAOYUPINGDING

目标A 1.1 节

● 通过对实际问题情境的分析，确定二次函数的表达式，并体会二次函数的意义.

1. 判断下列函数是不是二次函数. 如果是二次函数，请说出它的二次项系数、一次项系数和常数项.

（1）$y=2x^2-3$.　　（2）$y=3x-1$.

（3）$y=(2x-1)(1-x)$.　　（4）$y=\dfrac{1}{x^2}+1$.

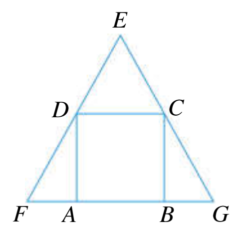
选学 **2.** 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$，当 $x=1$ 时，$y=3$；当 $x=-2$ 时，$y=7$；当 $x=3$ 时，$y=-3$. 求 a,b,c 的值，并写出该二次函数的表达式.

3. 一个乒乓球从光滑斜面自由滚下的路程 y(m)与时间 x(s)的平方成正比例. 当乒乓球滚下 4 m 时，经过的时间为 1.5 s. 求：

（1） y 关于 x 的函数表达式.

（2）当 $x=0.8$ s 时，乒乓球所经过的路程(精确到 0.01 m).

（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，矩形 $ABCD$ 的四个顶点在正三角形 EFG 的边上. 已知 $\triangle EFG$ 的边长为 2，记矩形 $ABCD$ 的面积为 S，边长 AB 为 x. 求：

（1） S 关于 x 的函数表达式和自变量 x 的取值范围.

（2）当 $x=1.5$ 时，S 的值.

（3）当 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，x 的值.

目标B 1.2 节

● 会用描点法画出二次函数的图象.

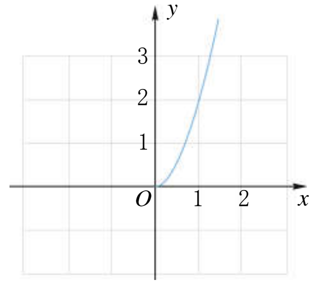
● 了解 $y=ax^2$，$y=a(x-m)^2$，$y=a(x-m)^2+k$ 三种二次函数的图象之间的关系.

● 了解二次函数图象的特点，会确定图象的开口方向，会利用公式求顶点坐标和对称轴.

5. 用描点法画下列二次函数的图象：

（1）$y=\dfrac{4}{5}x^2$.　　（2）$y=\dfrac{4}{5}(x-1)^2$.

6. 已知 $y=ax^2(a\neq0)$的图象的一部分如图所示，利用图形的轴对称，将 $y=ax^2(a\neq0)$的图象补画完整，并画出 $y=-ax^2$ 的图象.



（第 6 题）

7. 说出二次函数 $y=-3x^2+6x$ 的图象可由怎样的二次函数的图象经过如何平移得到.

8. 将 $y=4x^2$ 的图象先向左平移$\frac{3}{2}$个单位，再向下平移$\frac{3}{4}$个单位，求最终所得图象的函数表达式，并说出它的二次项系数、一次项系数和常数项.

9. 求下列二次函数图象的开口方向、顶点坐标和对称轴.

（1）$y=7x^2-14x+1$.　　（2）$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{5}{6}$.

10. 已知二次函数的图象经过点(0，3)，顶点坐标为(−4，18). 求这个二次函数的表达式，以及图象与 x 轴交点的坐标.

目标C 1.3 节 1.4 节

●能从图象上认识二次函数的性质.

●会利用二次函数的图象求一元二次方程的解.

11. 求下列二次函数的最大值或最小值，以及对应自变量的值.

（1）$y=-\frac{1}{2}x^2-2x+3$.　　（2）$y=\frac{2}{3}x^2-\frac{\sqrt{2}}{3}x+1$.

12. 已知二次函数 $y=-2x^2+6x-1$. 当 x 在什么范围内时，y 随 x 的增大而增大？当 x 在什么范围内时，y 随 x 的增大而减小？

13. 在 1968 年墨西哥城举办的奥运会跳远比赛中，比蒙(Beamon)表演了令人惊叹的一跳，以 8.90 m的成绩刷新了世界纪录. 若记起跳后时间为 t(s)，比蒙所处的高度为 h(m)，则可以用函数 $h=4.6t-4.9t^2$ 来描述他起跳后高度的变化.

（1）画出函数的图象.

（2）他起跳后的最大高度是多少(精确到 0.01 m)?

（3）分别记当 $t=0.4, 0.5, 0.8$ 时，他所处的高度为 h_1, h_2, h_3，试比较 h_1, h_2, h_3 的大小.

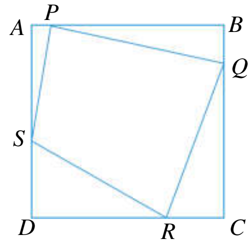
14. 利用图象求下列一元二次方程的解.

（1）$2x^2-7=0$.　　（2）$2x^2-4x+1=0$.

目标D 1.4节

●会运用二次函数解决简单实际问题.

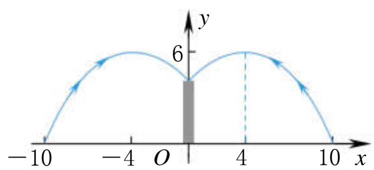
15. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 a，点 P,Q,R,S 分别在 AB,BC,CD,DA 上，且 $BQ=2AP,CR=3AP,DS=4AP$. 问：AP 长为多少时，四边形 $PQRS$ 的面积有最小值？最小值是多少？



（第 15 题）

16. 某宾馆有 120 间标准房，当标准房价格为 100 元时，每天都客满. 市场调查表明单间房价在 100～150 元之间（含100 元，150 元）浮动时，每提高10 元，日均入住数减少 6 间. 如果不考虑其他因素，宾馆将标准房价格提高到多少元时，客房的日营业收入最大？

17. 某游乐园要建造一个直径为 20 m 的圆形喷水池，计划在喷水池的周边安装一圈喷水头，使喷出的水柱距池中心 4 m 处达到最高，高度为 6 m. 如图，以水平方向为 x 轴，喷水池中心为原点建立直角坐标系.若要在喷水池的中心设计一个装饰物，使各方向喷出的水柱在此汇合，则这个装饰物应设计为多少高度？



（第 17 题）

18. 上午 7:00，一动车组列车在 A 城的正北 400 km 处，以 240 km/h 的速度驶向 A 城.同时，一辆汽车在 A 城的正东 80 km 处，以 80 km/h 的速度向正西方向行驶. 假设动车组列车和汽车的行驶方向和速度都保持不变，问：何时动车组列车与汽车之间的距离最近？最近距离是多少千米（精确到 0.1 km）？当动车组列车与汽车的距离最近时，汽车是否已过铁路与公路的立交处？

第 2 章

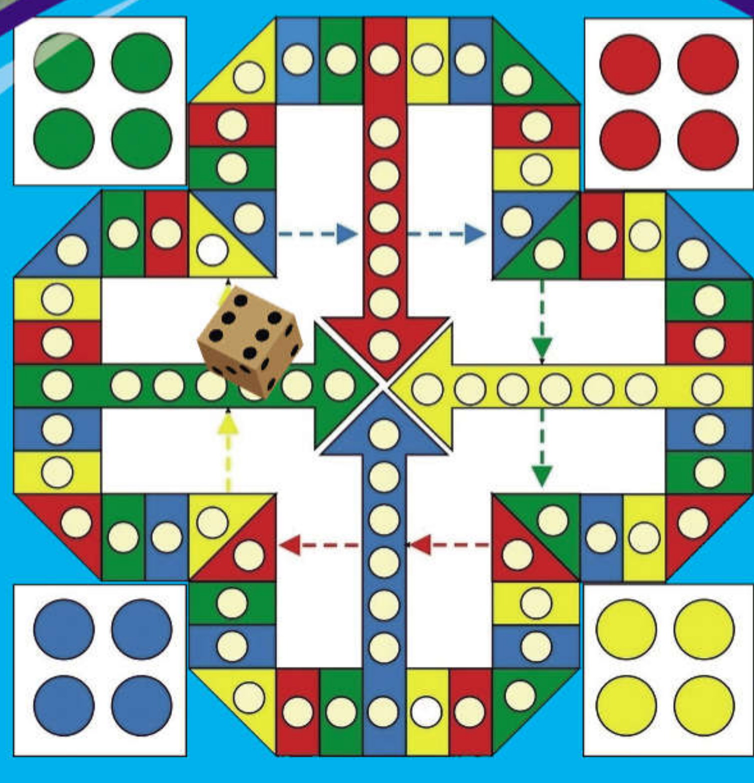
简单事件的概率

目录 CONTENTS<<

一个农场里出生了一头白色奶牛. 据统计,平均出生 1 千万头牛才会有 1 头是白色的. 你认为出生一头白色奶牛的概率是多少?

你玩过飞行棋吗?按飞行棋的规则,抛掷一枚骰子,朝上面的点数是“6”时,你的飞机才能起飞. 你抛掷一次骰子,得到点数 6 的概率是多少?

上述问题都需要我们学习概率的知识来解决. 本章我们将学习概率的意义、简单事件概率的计算、用频率估计概率和概率的实际应用.



2·1 事件的可能性

转盘自由转动一次，指针落在黄色区域和落在绿色区域的可能性哪一个较大？橘黄色区域和灰色区域呢？

1

我们知道，在现实生活中，有些事件是一定会发生的，如5月1日的前一天是4月30日；有些事件是一定不会发生的，如太阳从西边升起；而有些事件可能发生，也可能不发生，如明年元旦是晴天.

合作学习 HEZUOXUEXI

判断下列事件哪些必然会发生，哪些必然不会发生，哪些可能发生，也可能不发生？

（1）在地面上向空中抛掷一石块，石块终将落下.

（2）有一匹马奔跑的速度是 70 米 / 秒.

（3）杭州明年五一节当天的最高气温是 35℃.

（4）射击运动员射击一次，命中 10 环.

在数学中，我们把在一定条件下一定会发生的事件叫做**必然事件**（certain event）；在一定条件下一定不会发生的事件叫做**不可能事件**（impossible event）；在一定条件下可能发生，也可能不发生的事件叫做**不确定事件**（uncertain event）或**随机事件**（random event）.

做一做 ZUOYIZUO

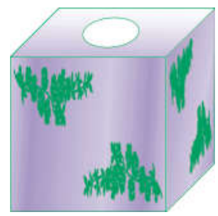
思考下面的例子，回答有关问题. 你能举出类似的例子吗?

(1) 小红看到蚂蚁在搬家，判断说:“天就要下雨了”. 在小红看来，“天就要下雨”是什么事件?

(2) 小聪的弟弟还没有学过三角形的有关知识，他想用长度为 10 cm，20 cm，40 cm 的小木条作为三条边做一个三角形. 小聪认为这是不可能的. 在小聪看来，用长度为 10 cm，20 cm，40 cm 的小木条作为三条边做一个三角形是什么事件?

例1 在一个箱子里放有 1 个白球和 2 个红球，它们除颜色外其余都相同.

(1) 从箱子里摸出 1 个球，是黑球. 这属于哪一类事件? 摸出 1 个球，是白球或者是红球. 这属于哪一类事件?



(2) 从箱子里摸出 1 个球，有几种不同的可能(摸到不同的球就表示不同的可能)? 它们属于哪一类事件?

(3) 从箱子里摸出 1 个球，放回，摇均匀后再摸出 1 个球，这样先后摸得的两球有几种不同的可能?

解 (1) 因为箱子里没有黑球，所以摸出 1 个球，是黑球这一事件是不可能事件. 因为箱子里只有白球和红球，所以摸出 1 个球，是白球或者是红球这一事件是必然事件.

(2) 因为箱子里放有 3 个球，所以从箱子里摸出 1 个球有 3 种不同的可能. 摸出 1 个白球，或摸出 1 个红球，都属于不确定事件.

(3) 箱子里的 1 个白球和 2 个红球分别记为白，红Ⅰ，红Ⅱ. 先摸出1个球，放回，摇均匀后再摸出 1 个球，其结果可列表(如表 2-1)或画成树状图(如图 2-1)表示.

表 2-1

第二次 / 第一次	白	红Ⅰ	红Ⅱ
白	白，白	白，红Ⅰ	白，红Ⅱ
红Ⅰ	红Ⅰ，白	红Ⅰ，红Ⅰ	红Ⅰ，红Ⅱ
红Ⅱ	红Ⅱ，白	红Ⅱ，红Ⅰ	红Ⅱ，红Ⅱ

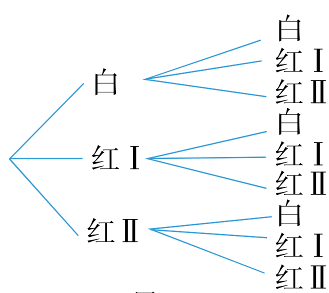


图 2-1

由表 2-1 或图 2-1 可知，从箱子里摸出 1 个球，放回，摇均匀后再摸出1 个球，共有 9 种可能：白，白；白，红Ⅰ；白，红Ⅱ；红Ⅰ，白；红Ⅰ，红Ⅰ；红Ⅰ，红Ⅱ；红Ⅱ，白；红Ⅱ，红Ⅰ；红Ⅱ，红Ⅱ.

列表或画树状图是人们用来确定事件发生的所有不同可能结果的常用方法. 它可以帮助我们分析问题，避免重复和遗漏，既直观又条理分明.

课内练习 KENEILIANXI

1. 下列哪些事件是必然事件，哪些事件是不可能事件，哪些事件是不确定事件？

（1）在一个装着白球和黑球的袋中摸球，摸出红球.

（2）任意抛掷一枚图钉，结果钉尖着地.

（3）在标准大气压下，气温为 2℃时，冰能熔化为水.

（4）在一张纸上任意画两条线段，这两条线段相交.

（第 2 题）

2. 任意抛掷一枚均匀的骰子. 骰子停止转动后，朝上的点数有哪些可能？

3. 任意抛掷一枚硬币 2 次，朝上的一面共有多少种可能？

作业题 ZUOYETI

A **1.** 下列事件中，哪些是必然事件，哪些是不可能事件，哪些是不确定事件？

（1）a 是实数，$|a| \geqslant 0$.

（2）某运动员跳高的最好成绩是 10.1 m.

（3）从车间刚生产的产品中任意抽一个，是次品.

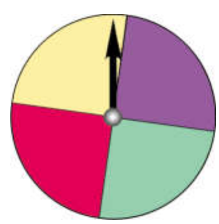
2. 如图，下列说法对吗？为什么？

（1）转动转盘，转盘停止时，指针一定落在红色区域.

（2）转动转盘，转盘停止时，指针可能落在黄色区域.

（3）转动转盘，转盘停止时，指针不可能落在紫色区域.

（4）转动转盘，转盘停止时，指针可能落在绿色区域或黄色区域.

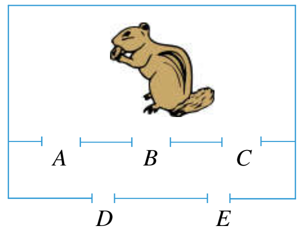


（第 2 题）

3. 任意转动一次第 2 题中的转盘,转盘停止时,指针所在区域的结果有多少种不同的可能?它们都是什么事件?

B 4. 从 2 种不同款式的衬衣和 2 种不同款式的裙子中分别取一件衬衣和一条裙子搭配,有多少种搭配的可能?

5. 笼子里关着一只小松鼠(如图),笼子的主人决定把小松鼠放归大自然,将笼子所有的门都打开.松鼠要先经过第一道门(A,B,或 C),再经过第二道门(D 或 E)才能出去.问:松鼠走出笼子的路线(经过的两道门)有多少种不同的可能?



(第 5 题)

2

合作学习

思考下面的问题:

(1) 如果你和象棋职业棋手下一盘象棋,谁赢的可能性大?

(2) 有一批成品西装,经质量检验,正品率达到98%.从这批西装中任意抽出1件,是正品的可能性大,还是次品的可能性大?

(3) 一个游戏转盘如图2-2,红、黄、蓝、绿四个扇形的圆心角度数分别是90°,60°,90°,120°.让转盘自由转动,当转盘停止转动后,指针落在哪个区域的可能性最大?落在哪个区域的可能性最小?有可能性相等的情况吗?为什么?

(4) 任意抛一枚均匀的硬币,出现正面朝上、反面朝上的可能性相等吗?

上述这些问题的结论,你是根据什么得出的?

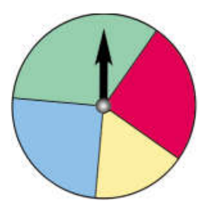


图 2-2

事件发生的可能性大小往往是由发生事件的条件来决定的,因此我们可以通过比较各事件发生的条件及其对事件发生的影响来比较事件发生的可能性大小.

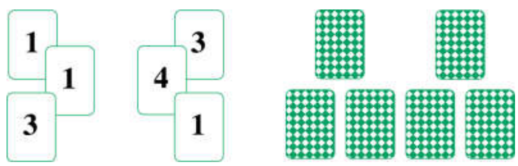
例2 某路口红绿灯的时间设置为：红灯40秒，绿灯60秒，黄灯4秒. 当人或车随意经过该路口时，遇到哪一种灯的可能性最大？遇到哪一种灯的可能性最小？为什么？

解 因为绿灯持续的时间最长，黄灯持续的时间最短，所以人或车随意经过该路口时，遇到绿灯的可能性最大，遇到黄灯的可能性最小.

做一做 ZUOYIZUO

1. 从放有 9 个红球和 1 个黑球的口袋中任意摸出 1 个球（这些球除颜色外都相同），哪一种颜色的球被摸到的可能性较大？请说明理由.

2. 有一些写有号码的卡片，它们的背面都相同. 现将它们背面朝上(如图)，从中任意摸出一张.
   （1）摸到几号卡片的可能性最大？摸到几号卡片的可能性最小？
   （2）摸到的号码是奇数，和摸到的号码是偶数，哪个的可能性大？



（第 2 题）

例3 某旅游区的游览路线图如图2-3所示. 小明通过入口后，每逢路口都任选一条道路. 他进入 A 景区或 B 景区的可能性哪个较大？请说明理由.

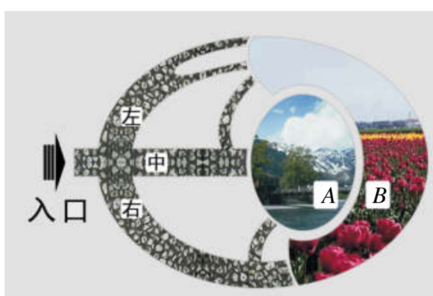


图 2-3

分析 先弄清小明进入旅游区后一共有多少种可能路线，进入 A 景区或 B 景区各占了多少种，就可知道哪一个可能性较大.

解 小明可能走的路线可列表如表2-2. 由图2-3和表2-2知，小明进入旅游区后一共有6种不同的可能路线. 因为小明是任选一条道路，所以走各种路线的可能性可认为是相等的. 而其中进入 A 景区有2种可能，进入 B 景区有4种可能，所以进入 B 景区的可能性较大.

表 2-2

左	B
	B
中	A
	B
右	A
	B

课内练习 KENEILIANXI

1. 从你班中任选一名同学去参加一项问卷调查，抽到男同学的可能性大，还是抽到女同学的可能性大？

2. 一个布袋里装有 7 个红球、2 个黑球、1 个白球，它们除颜色外都相同. 从中任意摸出 1 个球，并用字母 A,B,C,D,E 表示以下各事件：

A：摸出 1 个球，是红球，或白球，或黑球；

B：摸出 1 个球，是红球；

C：摸出 1 个球，是黑球；

D：摸出 1 个球，是白球；

E：摸出 1 个球，是绿球.

（1）比较 A,B,C,D,E 五个事件发生的可能性大小，并按可能性从小到大的顺序把它们排列起来.

（2）用“必然”“很可能”“不大可能”“不可能”等语句描述上述事件发生的可能性大小.

作业题 ZUOYETI

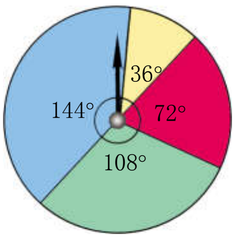
A **1.** 根据你的经历或所闻，用恰当的语句描述下列事件发生的可能性大小.

（1）你出门时忘了带钥匙.

（2）雨后天晴，忘了把伞带回家.

（3）考试时遇到与复习题一模一样的考题.

（4）明天本地空气质量等级是良，主要污染物是可吸入粒状污染物.



（第 3 题）

2. 一个袋中装有 6 个红球、2 个黄球、2 个白球、1 个黑球，它们除颜色外都相同. 任意摸出 1 个球，摸到哪种颜色球的可能性最大？摸到哪种颜色球的可能性最小？摸到哪两种颜色球的可能性相等？

3. 一个游戏转盘如图，黄色扇形、红色扇形、绿色扇形、蓝色扇形的圆心角度数分别为 36°，72°，108°，144°. 当转盘自由转动停止后，指针落在黄色区域、红色区域、绿色区域、蓝色区域的事件发生的可能性依次记为 p, q, r, s. 比较上述各事件发生的可能性大小，并把 p，q, r, s 按可能性从小到大排列，用“<”连接.

4. 有的同学认为：抛掷两枚均匀硬币，硬币落地后，朝上一面只可能有以下三种情况：①全是正面；②一正一反；③全是反面，因此这三个事件发生的可能性是相等的. 你同意这种说法吗？若不同意，你认为哪一个事件发生的可能性最大？为什么？

B **5.** 请举出两个不确定事件的实际例子，要求其中一个发生的可能性很小，而另一个发生的可能性较大.

6. 小李从标有 1 到 20 序号的 20 张卡片中任意抽取 1 张，抽到序号是 2 的倍数与序号是 5 的倍数的可能性哪个大？

2·2 简单事件的概率

任意抛掷一枚均匀的骰子，结果朝上一面的点数为 3 的概率是多少？朝上一面的点数为 6 呢？朝上一面的点数为 3 的倍数呢？

1

在数学中，我们把事件发生的可能性的大小称为事件发生的**概率**(probability)，一般用 P 表示. 事件 A 发生的概率记为 $P(A)$.

例如，随意抛掷一枚均匀的硬币，记正面朝上的事件为 A，反面朝上的事件为 B. 这两个事件发生的条件相同，因此这两个事件发生的可能性的

大小相等，均为$\frac{1}{2}$，也就是说，A，B 两个事件发生的概率都是$\frac{1}{2}$，即 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$.

例1 一项答题竞猜活动，在 6 个式样、大小都相同的箱子中有且只有一个箱子里藏有礼物.参与选手将回答 5 道题目，每答对一道题，主持人就从剩下的箱子中去掉一个空箱子；而一旦答错，即取消后面的答题资格，选手从剩下的箱子中选取一个箱子.求下列事件发生的概率.

（1）事件 A：选手答对了全部 5 道题，他选中藏有礼物的箱子.

（2）事件 B：选手连续答对了 4 道题，他选中藏有礼物的箱子.

（3）事件 C：选手连续答对了 3 道题，他选中藏有礼物的箱子.

解 （1）这个选手答对全部 5 道题，则只剩下一个藏有礼物的箱子，因此他选中藏有礼物的箱子的可能性是百分之百，也就是 1.所以事件 A 发生的概率为 $P(A)=1$.

（2）这个选手连续答对 4 道题，则还剩下 2 个箱子，其中只有一个箱子中藏有礼物. 由于选手不知道礼物在哪一个箱子里，每一个箱子被选取的可能性大小相等，各占$\frac{1}{2}$，所以事件 B 发生的概率为 $P(B)=\frac{1}{2}$.

（3）这个选手连续答对 3 道题，则还剩下 3 个箱子，其中只有一个箱子中藏有礼物.同样，由于选手不知道礼物在哪一个箱子里，每一个箱子被选取的可能性大小都相等，各占$\frac{1}{3}$，所以事件 C 发生的概率为 $P(C)=\frac{1}{3}$.

一般地，必然事件发生的概率为 100%，即 P(必然事件)$=1$；不可能事件发生的概率为 0，即 P(不可能事件)$=0$. 而随机事件发生的概率介于 0 与 1 之间，即$0<P$(随机事件)<1.

如果事件发生的各种结果的可能性相同且互相排斥，结果总数为 n，事件 A 包含其中的结果数为 $m(m\leqslant n)$，那么事件 A 发生的概率为

$$\boldsymbol{P(A)=\frac{m}{n}}.$$

例如，例 1 第(3)题中，从三个箱子中任选一个，可能性相等的结果总数 $n=3$，事件 C 包含其中的结果数 $m=1$，所以事件 C 发生的概率 $P(C)=\frac{m}{n}=\frac{1}{3}$.

例2 求下列事件发生的概率：

(1) 事件 A：从一副扑克牌中任抽 1 张牌，抽出的这张牌是红桃 A.

(2) 事件 B：先从一副扑克牌中去掉 2 张王牌，然后任抽 1 张牌，抽出的这张牌是红桃.

解 (1) 一副扑克牌共有 54 张牌，从中任抽 1 张牌，所有可能性相等的结果总数 $n=54$. 抽到红桃 A 只有 1 种可能，也就是 $m=1$，所以事件 A 发生的概率 $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{54}$.

(2) 去掉 2 张王牌后，一副扑克牌还剩下 52 张牌，从中任抽 1 张牌，所有可能性相等的结果总数 $n=52$. 因为红桃花色的牌有 13 张，所以事件B 包含其中的结果数 $m=13$.

所以事件 B 发生的概率 $P(B)=\frac{m}{n}=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$.

课内练习 KENEILIANXI

1. 小明说“明天百分之百是晴天”. 在小明看来，明天是晴天的概率是多少？如果小明的判断是正确的，那么明天下雨的概率是多少？

2. 有这样一道选择题：

   熊猫一只前掌趾的根数是(　　)

   (A) 4 根.　　(B) 5 根.　　(C) 6 根.

   三个选项中有且只有一个正确.如果你不知道熊猫前掌趾的根数，任选一个选项，那么你答对这道题的概率是多少？如果你知道熊猫前掌趾的根数呢？

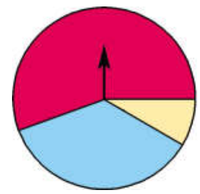
(第 2 题)

3. 请解答节前语中的问题.

作业题 ZUOYETI

A **1.** 任意写出一个偶数和一个奇数. 两数之和是奇数的概率是____,两数之和是偶数的概率是________.

2. 如图,一个转盘由红、黄、蓝三色组成. 自由转动转盘一次,指针落在红、黄、蓝三个区域的概率分别记为 P_1,P_2,P_3. 把 $0,\frac{1}{2},1,P_1,P_2,P_3$ 这六个值按从小到大排列,并用“<”连接.



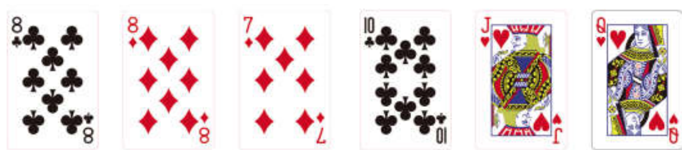
(第 2 题)

3. 有 6 张扑克牌(如图),把它们背面朝上,从中任抽一张. 求:

(1) 抽到方块 8 的概率.

(2) 抽到方块的概率.

(3) 抽到方块或红桃的概率.



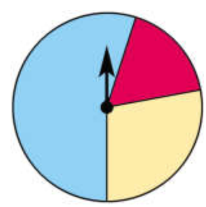
(第 3 题)

4. 20 瓶饮料中有 2 瓶已过了保质期. 从 20 瓶饮料中任取 1 瓶, 取到已过保质期的饮料的概率是多少?

B **5.** 下列说法对吗? 请说明理由.

(1) 从分别写有 1,2,3,4 的四张卡片中任抽一张,卡片上的数是质数的概率是 $\frac{1}{2}$.

(2) 自由转动如图三色转盘一次,事件“指针落在红色区域”的概率为 $\frac{1}{3}$.



(第 5(2)题)

6. 一个布袋里放有红色、黄色、黑色三种球,它们除颜色外其余都相同. 红球、黄球、黑球的个数之比为 5∶3∶1. 用 P_1,P_2,P_3 分别表示从布袋里任意摸出 1 个球,是红球、黄球、黑球的概率,求 P_1,P_2,P_3,以及它们的和.

运用公式 $P(A)=\frac{m}{n}$ 求简单事件发生的概率时，首先应确定所有结果的可能性都相等，然后确定所有可能的结果总数 n 和事件 A 包含其中的结果数 m.

例3 一个布袋里装有 4 个只有颜色不同的球，其中 3 个红球，1 个白球. 从布袋里摸出 1 个球，记下颜色后放回，搅匀，再摸出 1 个球. 求下列事件发生的概率：

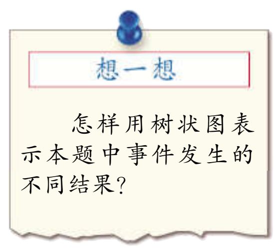
（1）事件 A：摸出 1 个红球，1 个白球.

（2）事件 B：摸出 2 个红球.

解 为方便起见，我们将 3 个红球编号为红$_1$，红$_2$，红$_3$. 根据题意，第一次和第二次摸球的过程中，摸到 4 个球中任意一个球的可能性都是相同的. 两次摸球的所有可能的结果可列表表示，如表 2-3.

表 2-3

第二次 / 第一次	白	红$_1$	红$_2$	红$_3$
白	白，白	白，红$_1$	白，红$_2$	白，红$_3$
红$_1$	红$_1$，白	红$_1$，红$_1$	红$_1$，红$_2$	红$_1$，红$_3$
红$_2$	红$_2$，白	红$_2$，红$_1$	红$_2$，红$_2$	红$_2$，红$_3$
红$_3$	红$_3$，白	红$_3$，红$_1$	红$_3$，红$_2$	红$_3$，红$_3$



由表 2-3 知，$n=4\times4=16$.

（1）事件 A 包含其中的结果数 $m=6$（如表 2-3 中绿色部分），

$\therefore\ P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.

（2）事件 B 包含其中的结果数 $m=9$（如表 2-3 中紫色部分），

$\therefore\ P(B)=\frac{m}{n}=\frac{9}{16}$.

例4 学校组织春游,安排给九年级三辆车,小明与小慧都可以从这三辆车中任选一辆搭乘. 小明与小慧同车的概率有多大?

解 记这三辆车分别为甲、乙、丙,小明与小慧乘车的所有可能的结果可以列成表 2-4,各种结果发生的可能性相同.

表 2-4

小明选的车 \ 小慧选的车	甲	乙	丙
甲	甲,甲	甲,乙	甲,丙
乙	乙,甲	乙,乙	乙,丙
丙	丙,甲	丙,乙	丙,丙

由表2-4知,$n=9$,小明与小慧同车包含其中的结果数$m=3$,

$$\therefore \quad P=\frac{m}{n}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$$

答:小明和小慧同车的概率是$\frac{1}{3}$.

例5 如图2-4,转盘的白色扇形和红色扇形的圆心角分别为120°和240°. 让转盘自由转动 2 次,求指针一次落在白色区域,另一次落在红色区域的概率.

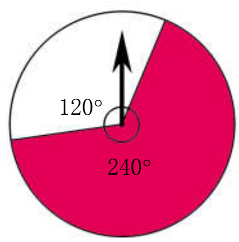


图 2-4

分析 很明显,由于两个扇形的圆心角不相等,转盘自由转动 1 次,指针落在白色区域、红色区域的可能性不相同. 如果我们把红色的扇形划分成两个圆心角都是 120°的扇形,那么转盘自由转动 1 次,指针落在各个扇形区域的可能性都应当相同,这样就可以用列举法来求出指针一次落在白色区域,另一次落在红色区域的概率.

解 把红色扇形划分成两个圆心角都是 120°的扇形(图 2-5),分别记为红Ⅰ,红Ⅱ. 让转盘自由转动 2 次,所有可能的结果如图 2-6 所示,且各种结果发生的可能性相同.

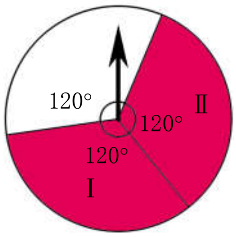


图 2-5

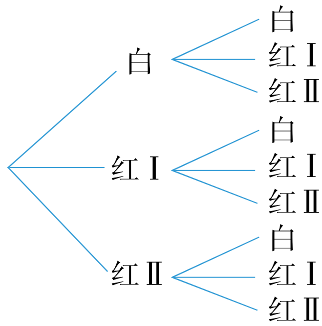


图 2-6

所以$n=3\times3=9$，事件“指针一次落在白色区域，另一次落在红色区域”包含其中的结果数$m=4$.

$$\therefore\quad P=\frac{4}{9}.$$

课内练习 KENEILIANXI

1. 设有 5 个型号相同的杯子，其中一等品 4 个，二等品 1 个. 从中任意取 1 个杯子，记下等级后放回，第二次再从中取 1 个杯子. 求：

（1）两次取出都是一等品杯子的概率.

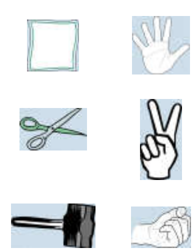
（2）两次取出至少有一次是二等品杯子的概率.

2. 有两辆车按 1，2 编号，李、张两位老师可任意选坐一辆车. 求两位老师同坐 1 号车的概率.

探究活动 TANJIUHUODONG

两人做“锤子、剪刀、布”的游戏. 游戏规则是：若一人出“剪刀”，另一人出“布”，则出“剪刀”者胜；若一人出“锤子”，另一人出“剪刀”，则出“锤子”者胜；若一人出“布”，另一人出“锤子”，则出“布”者胜. 若两人出相同的手势，则认为此次游戏无效，重新开始游戏.

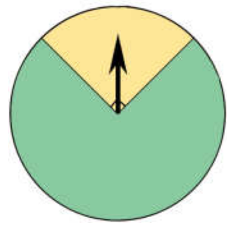
先写出这个游戏中所有可能出现的有效结果. 在游戏中，无论你出“锤子、剪刀、布”中的哪一个，你获胜的概率是多少？对方呢？这个游戏对双方是否公平？



作业题 ZUOYETI

A 1. 衣橱中挂着 3 套不同颜色的服装，同一套服装的上衣与裤子的颜色相同，如图. 若从衣橱里各任取一件上装和一条裤子，它们取自同一套的概率是多少？

（第 1 题）



（第 2 题）

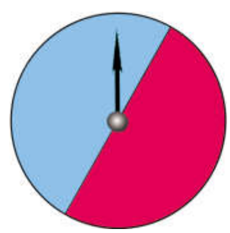
2. 如图，转盘中黄色扇形的圆心角为 $90°$，绿色扇形的圆心角为 $270°$. 让转盘自由转动两次，求两次指针都落在绿色区域的概率.

3. 有两道门，各配有 2 把钥匙. 这 4 把钥匙分放在 2 个抽屉里，使每个抽屉里恰好有每一道门的 1 把钥匙. 若从每个抽屉里任取 1 把钥匙，则能打开两道门的概率是多少？

B 4. 把一枚均匀的骰子连续抛掷两次，求两次朝上面的点数和为 5 的概率.

5. 华东地区 N 市和 S 市之间每天有往返飞机航班各 2 趟. 业务员小赵和小黄同一天从 N 市飞往 S 市，第二天又从 S 市飞回 N 市. 如果他们可选择任一航班往返，则选择同一航班从 N 市飞往 S 市的概率是多少？选择相同航班往返两地的概率是多少？

C 6. 如图是一个红、蓝两色各占一半的转盘. 小李与小明做“配紫色”的游戏，规则是：两人各让转盘自由转动一次，当转盘停止转动时，如果指针所在区域的颜色分别是一红一蓝，就说“配成紫色”，小明胜；如果指针所在区域的颜色配不成紫色，小李胜. 在这个游戏中，小李与小明获胜的概率分别是多少？该游戏规则对双方公平吗？



（第 6 题）

机会均等

让我们先看一个简单的游戏.

小明和小聪一起玩掷骰子游戏,游戏规则如下:

若骰子朝上一面的数字是6,则小聪得10分;若骰子朝上一面的数字不是6,则小明得10分.谁先得到100分,谁就获胜.

这个游戏规则公平吗?

从表面上看,小聪和小明掷一次都有可能得10分,好像公平,但实质上小明得分的机会要比小聪大得多,显然游戏规则对小聪并不公平.

一般地, 如果在客观条件下使参加的各方获胜的概率相等(也称机会均等),那么比赛或者游戏是公平的. 例如,一个转盘如图2-7,转盘上红、黄两色各占$\frac{1}{2}$. 让转盘自由转动一次,若指针落在红色区域,则小聪得10分;若指针落在黄色区域, 则小明得10分. 谁先得到100分, 谁就获胜. 因为转盘上红、黄两色各占一半,转盘自由转动一次,指针落在红色、黄色区域的机会均等,所以这个游戏是公平的.

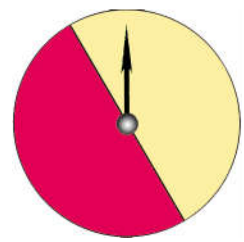


图2-7

下面让我们再看一个游戏.

这个游戏的规则是:有22颗小石子,游戏双方轮流拿石子,各方每次只准拿1颗或2颗. 规定其中一方先拿, 拿到最后一颗石子者输. 你认为它公平吗?如果你认为游戏不公平,请你修改规则,使游戏变得公平.

请与你的同学一起玩一玩这个游戏. 想一想,有没有必胜的策略,使后拿者一定取胜?

2·3 用频率估计概率

提高运动员的罚球命中率是篮球教练需考虑的问题之一.你认为可以如何估计一位篮球运动员的罚球命中率?

我们知道,任意抛一枚均匀的硬币,“正面朝上”的概率是$\frac{1}{2}$.科学家曾做过成千上万次抛硬币的试验,其中部分结果如表 2-5.

表 2-5

试验者	抛掷次数 n	“正面朝上”的次数 m	频率 $\frac{m}{n}$
棣莫弗	2 048	1 061	0.518 1
布丰	4 040	2 048	0.506 9
费勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

把表 2-5 中抛掷次数 n 与“正面朝上”的频率$\frac{m}{n}$用统计图表示,如图2-8.

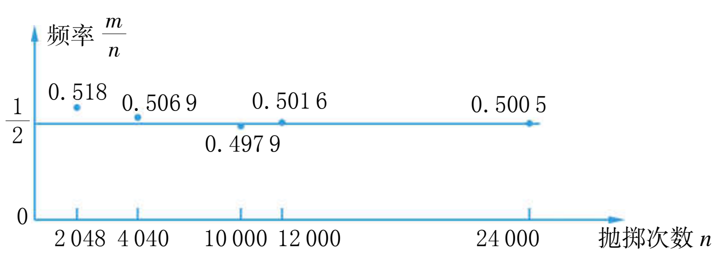


图 2-8

观察表 2-5 和图 2-8,你获得什么启示?

合作学习 HEZUOXUEXI

让我们来做抛掷两枚硬币的试验. 观察它们落地时出现“一正一反”的次数.

1. 全班每人各取两枚同样的硬币，做 10 次掷硬币的试验，填入表 2-6.

表 2-6

学号	试验次数	一正一反的次数	频率

2. 将每个小组同学的试验结果进行累计，填入表 2-7.

表 2-7

组号	试验总次数	一正一反的总次数	频率

想一想

各小组试验的结果一样吗?

3. 将其中两组同学的试验结果进行累计，填入表 2-8.

表 2-8

组号	试验总次数	一正一反的总次数	频率

4. 将其中四组同学的试验结果进行累计，填入类似统计表.

5. 统计全班同学的试验结果，填入类似统计表. 根据上述统计表画出抛掷两枚硬币试验，结果为“一正一反”的频率统计图.

议一议：频率与概率有什么区别和联系? 随着重复试验次数的增加，频率的变化趋势如何?

从上面的试验可以看到：在相同条件下，当重复试验的次数大量增加时，事件发生的频率就稳定在相应的概率附近. 因此，我们可以**通过大量重复试验，用一个事件发生的频率来估计这一事件发生的概率.**

做一做 ZUOYIZUO

1. 某运动员投篮 5 次,投中 4 次. 能否说该运动员投 1 次篮,投中的概率为$\frac{4}{5}$? 为什么?

2. 一个农场里出生了一头白色的小奶牛. 据统计,平均出生 1000 万头牛才会有 1 头是白色的. 由此估计出生 1 头白色奶牛的概率是多少?

例 在同样条件下对某种小麦种子进行发芽试验,统计发芽种子数,获得如下频数表.

表 2–9

试验种子数 n(粒)	1	5	50	100	200	500	1 000	2 000	3 000
发芽频数 m	0	4	45	92	188	476	951	1 900	2 850
发芽频率 $\frac{m}{n}$	0								

(1) 计算表 2-9 中的各个频率.

(2) 估计该麦种的发芽概率.

(3) 如果播种该种小麦每公顷所需麦苗数为 4 181 818 棵,种子发芽后的成秧率为 87%,该麦种的千粒质量为 35 g,那么播种 3 公顷该种小麦,估计约需麦种多少千克(精确到 1 kg)?

解 (1) 当 $n=5$ 时,$m=4$,则发芽的频率 $\frac{m}{n}=\frac{4}{5}=0.80$. 依次算得各个频率为 0.90,0.92,0.94,0.952,0.951,0.95,0.95.

(2) 由第(1)题可知,该麦种的发芽概率约为 0.95.

(3) 设需麦种 x(kg),则粒数为 $x\times 1\,000\times\frac{1\,000}{35}$.

由题意,得 $x\times 1\,000\times\frac{1\,000}{35}\times 0.95\times 87\%=3\times 4\,181\,818$,

解得 $x\approx 531$(kg).

答:播种 3 公顷该种小麦,估计约需麦种 531 kg.

课内练习 KENEILIANXI

1. 若用上例这种小麦种子 350 g 播种，大约能得到多少棵麦苗？

2. 任意抛掷一枚均匀的骰子，朝上面的点数为 1 的概率为 $\frac{1}{6}$. 下列说法正确吗？为什么？

（1）任意抛掷一枚均匀的骰子 12 次，朝上面的点数为 1 的次数为 2 次.

（2）任意抛掷一枚均匀的骰子 1 200 次，朝上面的点数为 1 的次数大约为 200 次.

作业题 ZUOYETI

A **1.** 对一批衬衣进行抽检，统计合格衬衣的件数，得到合格衬衣的频数表如下：

抽取件数(件)	50	100	150	200	500	800	1 000
合格频数	42	88	141	176	445	724	901
合格频率							

（1）根据表中数据求出各个频率，并填入表中.

（2）估计任抽一件衬衣是合格品的概率.

（3）估计出售 1 200 件衬衣，其中次品大约有几件.

2. 取 5 张扑克牌，其中 2 张“方块”，1 张“梅花”，2 张“红桃”.

（1）求从中任抽 1 张，是“方块”或“红桃”的概率.

（2）利用重复试验的方法验证第(1)题的结果，介绍你的验证过程和结果.

（第 2 题）

B **3.** 从第 2 题的 5 张扑克牌中任意抽取 1 张，记下花色后放回，再任意抽取 1 张.

（1）求抽取的 2 张扑克牌中，一张为“方块”，另一张为“红桃”的概率.

（2）用重复试验的方法验证第(1)题的结果，并介绍你的试验过程和结果(要求列出频数表).

2·4 概率的简单应用

买彩票的人一定希望知道自己中奖的概率有多大.怎样估计彩票中奖的概率呢?

人们在生活、生产和科学研究中,经常需要知道一些事件发生的可能性有多大.例如,买彩票时希望知道中奖的概率有多大;出门旅游时希望知道天气是否晴朗等.概率与人们的生活密切相关,能帮助我们对许多事件作出判断和决策,因此在生活、生产和科研等各个领域都有着广泛的应用.

例1 某商场举办有奖销售活动,每张奖券获奖的可能性相同.以每 10 000 张奖券为一个开奖单位,设特等奖 1 个,一等奖 10 个,二等奖 100 个.问:1 张奖券中一等奖的概率是多少?中奖的概率是多少?

解 因为 10 000 张奖券中能中一等奖的张数是 10 张,所以 1 张奖券中一等奖的概率 $P=\frac{10}{10\ 000}=\frac{1}{1\ 000}$.

又因为 10 000 张奖券中能中奖的奖券总数是 $1+10+100=111$(张),

所以 1 张奖券中奖的概率 $P=\frac{111}{10\ 000}$.

答:1 张奖券中一等奖的概率是 $\frac{1}{1\ 000}$,中奖的概率是 $\frac{111}{10\ 000}$.

例2 表 2-10 是中国人民银行发布的中国人寿保险经验生命表[1](2000~2003 年)男性表的部分摘录.根据表 2-10 估算下列概率(结果精确到 0.000 1).

(1) 某男性今年 61 岁,他当年死亡的概率.

(2) 某男性今年 31 岁,他活到 62 岁的概率.

[1] 生命表又称死亡率表,是人寿保险费率计算的主要依据.表中生存人数 l_x,死亡人数 d_x 的含义举例说明如下:对于出生的每 1 000 000 名男性,活到 30 岁的人数 $l_{30}=984\ 635$ 人($x=30$),这一年龄死亡的人数 $d_{30}=867$ 人.

表 2–10

年龄x	生存人数l_x	死亡人数d_x
0	1 000 000	722
1	999 278	603
30	984 635	867
31	983 767	917
61	891 725	9 354
62	882 371	10 365
63	872 005	11 415
64	860 590	12 515
79	516 367	35 563
80	480 804	36 631
81	444 173	37 410
82	406 763	37 858

解 （1）根据表 2-10，61 岁男性的生存人数 $l_{61}=891\,725$，61 岁男性的死亡人数 $d_{61}=9\,354$，

所以所求概率 $P=\dfrac{d_{61}}{l_{61}}=\dfrac{9\,354}{891\,725}\approx 0.010\,5$.

答：他当年死亡的概率约为 0.010 5.

（2）根据生命表 2-10，$l_{31}=983\,767$，$l_{62}=882\,371$，

所以所求概率 $P=\dfrac{l_{62}}{l_{31}}=\dfrac{882\,371}{983\,767}\approx 0.896\,9$.

答：他活到 62 岁的概率约为 0.896 9.

课内练习 KENEILIANXI

1. 根据表 2-10，回答下列各题：

（1）一名 80 岁的男性在当年死亡的概率是多少？

（2）如果有 10 000 名80 岁的男性参加寿险投保，当年死亡的人均赔偿金为 a 元，那么估计保险公司需支付当年死亡的人的赔偿金为多少元？

2. 九年级三班同学作了关于私家车乘坐人数的统计，在 100 辆私家车中，统计结果如下表：

每辆私家车乘客的数目	1	2	3	4	5
私家车的数目	58	27	8	4	3

根据以上结果，估计抽查一辆私家车且它载有超过 2 名乘客的概率.

作业题 ZUOYETI

A **1.** 据有关部门 2019 年 2 月全国法定传染病疫情统计，我国 715 176 个传染病例中，有 307 892 人患的是流行性感冒. 从 715 176 个传染病例中任意抽查一名传染病患者，结果患的是流行性感冒的概率约是多少？

2. 下表是中国人民银行公布的中国人寿保险经验生命表（2000～2003 年）女性表的部分摘录. 根据下表估算下列概率（结果精确到 0.000 1）.

年龄x	生存人数l_x	死亡人数d_x
0	1 000 000	661
1	999 339	536
30	991 476	403
31	991 074	428
61	938 005	6 064
62	931 941	6 743
63	925 198	7 489
64	917 709	8 314
79	649 175	32 429
80	616 746	34 398
81	582 347	36 253
82	546 095	37 950

（1）一名女性 79 岁当年死亡的概率.

（2）一名 61 岁的女性活到 80 岁的概率.

B **3.** 某公司举办元旦庆祝晚会，每位参加者领 1 张奖券参加摇奖活动. 第一次摇奖共分发 328 张奖券，其中只有 1 张奖券号码能中奖，每张奖券获奖的机会相同. 小王所在的销售部门共有 25 人参加晚会. 在第一次摇奖中，小王得奖的概率是多少？小王所在的销售部门有人得奖的概率是多少？

C **4.** 一个密码箱的密码，每个数位上的数都是从 0 到 9 的自然数. 若要使不知道密码的人一次就拨对密码的概率小于 $\frac{1}{999}$，则密码的位数至少需多少位？

小结

XIAOJIE

填空.

1. 在一定条件下必然会发生的事件叫做________；在一定条件下必然不会发生的事件叫做__________；在一定条件下，__________________的事件称为不确定事件（或随机事件）.

2. 在数学上，事件发生的可能性的大小也称为事件发生的______. 必然事件发生的概率为_______，不可能事件发生的概率为______. 若用 $P(A)$ 表示不确定事件 A 发生的概率，则______ $< P(A) <$ ______.

3. 如果事件发生的各种结果的可能性相同，且互相排斥，结果总数为 n，其中事件 A 包含其中的结果数为 m $(m \leqslant n)$，那么事件 A 发生的概率 $P(A)=$________.

4. 可以通过大量重复试验，用一个事件发生的______来估计这一事件发生的概率.

填表.

技能内容	学会程度		
	学 会	基本学会	不 会
用列表和画树状图等枚举方法确定事件发生的各种不同可能的结果			
用列举法计算简单事件发生的概率			
用重复试验的方法估计简单事件发生的概率			

目标与评定

MUBIAOYUPINGDING

目标A 2.1节

- 了解必然事件、不可能事件、不确定事件(随机事件)的概念.
- 会用列表、画树状图等方法,确定简单事件发生的各种可能的结果.
- 了解事件发生的可能性大小的意义.
- 会在简单情况下比较事件发生的可能性的大小.

1. 下列事件中,哪些是必然事件? 哪些是不可能事件? 哪些是不确定事件?

(1) 任意选择某一电视频道,它正播放动画片.

(2) 人在月球上所受的重力比在地球上小.

(3) 一个三角形三个内角的和小于 180°.

2. 一个箱子里有 7 个白球、2 个红球、1 个黑球,它们除颜色外其余均相同. 从箱子里任意摸出一个球,一共有多少种不同的可能(摸到不同的球就表示不同的可能)? 其中是黑球的情况有多少种不同的可能? 不是红球的情况有多少种不同的可能?

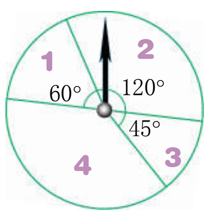
3. 某一公园有 3 个入口和 2 个出口. 小明从进入公园到走出公园,一共有多少种不同出入路线的可能?

4. 下列事件的发生,对你来说是很可能、有可能、不大可能、不可能,还是必然的?

(1) 上数学课,忘记带计算器. (2) 外语考试成绩达到优秀.

(3) 100 米跑的成绩在 13 秒以内. (4) 捡到失物交还失主.

(5) 过马路走人行横道线. (6) 上课迟到.



(第 5 题)

5. 如图是一个游戏转盘. 自由转动转盘,当转盘停止转动后,指针分别落在数字 1,2,3,4 所示区域内的事件发生的可能性的大小依次记为 r,s,t,k. 比较 r,s,t,k 的大小,并用“<”连接.

目标B 2.2节

- 在具体情境中了解概率的意义.
- 运用列举法(包括列表、画树状图)计算简单事件发生的概率.

6. 袋中装有 3 个绿球、3 个黑球和 6 个红球,它们除颜色外其余均相同. 从袋中摸出一个球,计算下列事件发生的概率:

(1) 摸出绿球. (2) 摸出白球. (3) 摸出红球.

(4) 摸出黑球. (5) 摸出黑球或绿球.

7. 有 8 张卡片,每张卡片上分别写有不同的从 1 到 8 的一个自然数. 从中任意抽出一张卡片,计算下列事件发生的概率:

(1) 卡片上的数是 3 的倍数. (2) 卡片上的数不是 3 的倍数.

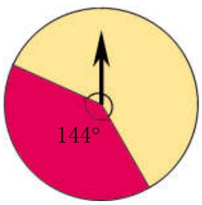
8. 一个布袋里装有只有颜色不同的 7 个球，其中 3 个红球，4 个白球. 从中任意摸出 1 个球，记下颜色后放回，搅匀，再摸出 1 个球. 求：

（1）摸出的 2 个球都是白球的概率.

（2）摸出的 2 个球中，1 个是白球，1 个是红球的概率.

9. 抽屉里放有 4 只白袜子和 2 只黑袜子. 从中任意摸出 1 只袜子，记下颜色后放回，搅匀，再摸出 1 只袜子. 摸出的两只袜子颜色相同的概率是多少? 若第一次摸出的袜子不放回呢?

10. 有两颗相同的均匀的骰子，骰子各个面上的点数为 1～6. 小明与小慧做游戏，规定：每人连掷 2 次，若掷出两次的点数之和小于 7，则小慧胜，否则小明胜. 这个游戏公平吗? 请说明理由.



（第 11 题）

11. 有一个转盘如图，让转盘自由转动两次. 求：

（1）两次指针都落在黄色区域的概率.

（2）一次落在黄色区域，另一次落在红色区域的概率.

目标C 2.3 节

●知道大量重复试验时，频率可作为事件发生的概率的估计值.

●会通过重复试验，估计事件发生的概率.

12. 做任意抛掷一只纸杯的重复试验，获得如下数据：

抛掷总次数	杯口朝上		杯口朝下		横卧	
	频数	频率	频数	频率	频数	频率
10	1	0.1	2	0.2	7	0.7
20	3	0.15	4	0.2	13	0.65
50	10	0.2	20	0.4	20	0.4
100	21		38		41	
150	33		57			
200	44				80	

（1）完成上表.

（2）估计任意抛掷一只纸杯，以下事件发生的概率：

①杯口朝上；　②杯口朝下；　③横卧.


杯口朝上　　杯口朝下　　横卧

（第 12 题）

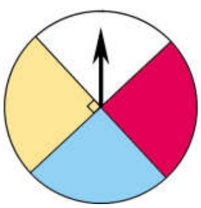
13. 某市政府对某项决议进行民意测验. 通过对 6 个区的市民作问卷调查,获得如下数据:

区域	问卷调查人数(人)	赞同		不赞同		弃权	
		频数	频率	频数	频率	频数	频率
A区	4 050	3 564				5	
B区	3 610	3 069				10	
C区	4 100	3 772				10	
D区	3 520	3 168				5	
E区	2 730	1 775				30	
F区	3 660	3 326				10	
合计							

(1) 完成上表(精确到 0.001).

(2) 估计市民赞同、不赞同该政策的概率分别为多少.

(3) 该市有 150 万选民,估计赞同该政策的选民有多少人,反对的有多少人.



(第 14 题)

14. 如图,让转盘自由转动一次,指针落在白色或红色区域的概率是多少? 先算出结果,然后用重复试验的方法进行验证.

要求:说明试验过程,求出频数、频率,列出频数表,并说明验证的结果.

目标D 2.4 节

●会综合运用事件的概率来解决一些简单的实际问题.

15. 有 A,B,C 三种款式的帽子,E,F,G 三种款式的围巾. 小慧任意选一顶帽子和一条围巾,恰好选中她所喜欢的 A 款帽子和 F 款围巾的概率是多少?

16. 某单位工会组织内部抽奖活动,共准备了 100 张奖券,设特等奖 1 个,一等奖 10 个,二等奖 20 个,三等奖 30 个. 已知每张奖券获奖的可能性相同. 求:

(1) 一张奖券中特等奖的概率.

(2) 一张奖券中奖的概率.

(3) 一张奖券中一等奖或二等奖的概率.

17. 为了有效保护环境, 某居委会倡议居民将生活垃圾进行可回收的、不可回收的和有害的分类投放. 一天,小林把垃圾分装在三个袋中,可他在投放时不小心把三个袋子都放错了位置. 你能确定小林是怎样投放的吗?一个人任意投放垃圾,把三个袋子都放错位置的概率是多少?

第3章

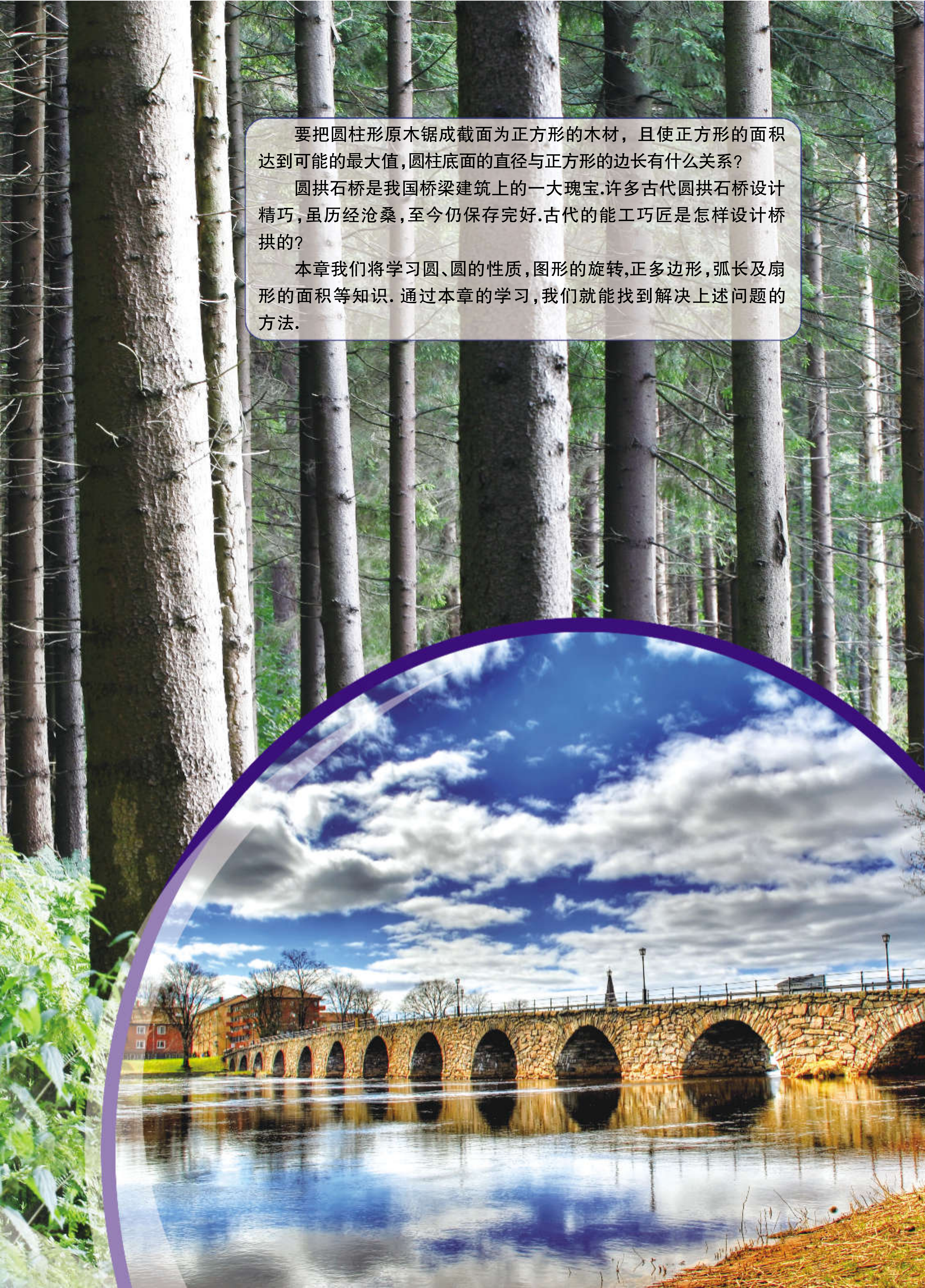
圆的基本性质

目录 CONTENTS<<

要把圆柱形原木锯成截面为正方形的木材，且使正方形的面积达到可能的最大值，圆柱底面的直径与正方形的边长有什么关系？

圆拱石桥是我国桥梁建筑上的一大瑰宝.许多古代圆拱石桥设计精巧，虽历经沧桑，至今仍保存完好.古代的能工巧匠是怎样设计桥拱的？

本章我们将学习圆、圆的性质，图形的旋转，正多边形，弧长及扇形的面积等知识. 通过本章的学习，我们就能找到解决上述问题的方法.



3·1 圆

圆是我们在日常生活中常见的几何图形. 我国东周时期的典籍《墨经》中记载:“圆,一中同长也.”你理解这句话的含义吗? 要确定一个圆,需要哪些条件?

1

小学里我们已经认识了圆,会用圆规画圆. 你知道圆上的点有什么特性吗?

取一根绳子,把它的一端用图钉固定在画板上,另一端系一支铅笔,然后拉紧绳子,并使它绕固定的一端旋转一周(图 3-1),这样就画出了一个圆. 显然,圆上任意一点 P(铅笔尖)到定点 O(图钉)的距离都相等(图 3-1).

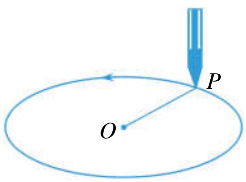


图 3-1

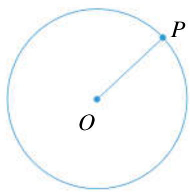


图 3-2

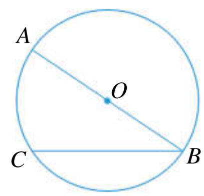
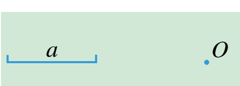


图 3-3

在同一平面内,线段 OP 绕它固定的一个端点 O 旋转一周(图 3-2),另一端点 P 所经过的封闭曲线叫做**圆**(circle),定点 O 叫做**圆心**(centre),线段 OP(不论转到什么位置)叫做圆的**半径**(radius). 以点 O 为圆心的圆,记做“$\odot O$”,读做“圆 O”.

如图 3-3,连结圆上任意两点的线段 BC 叫做**弦**(chord). 经过圆心的弦 AB 叫做**直径**(diameter). 显然,直径等于半径的 2 倍.

做一做 ZUOYIZUO



已知点 O 和线段 a(如图). 以 O 为圆心,线段 a 为半径作一个圆,并在圆上画出一条半径、一条直径和一条不是直径的弦.

圆上任意两点间的部分叫做**圆弧**,简称**弧**(arc). 圆的任意一条直径的两个端点分圆成两条弧,每一条弧都叫做**半圆**(semicircle). 小于半圆的弧叫

做**劣弧**(minor arc),劣弧用符号“$\frown$”和弧两端的字母表示,如图 3-3 中的劣弧 BC 记做$\overset{\frown}{BC}$,读做“弧 BC”;大于半圆的弧叫做**优弧**(major arc),半圆和优弧用符号“$\frown$”和三个字母表示(弧两端的字母和弧中间的字母),如图 3-3 中以 B,C 为端点的优弧记做$\overset{\frown}{BAC}$,读做“弧 BAC”.

半径相等的两个圆能够完全重合. 我们把半径相等的两个圆叫做**等圆**. 如图 3-4, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 就是两个等圆.

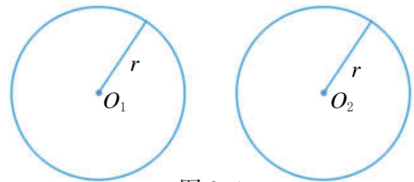


图 3-4

类似地,我们把能够重合的圆弧称为**相等的弧**.

你能说出同一平面内点与圆有几种位置关系吗? 怎样确定点与圆的位置关系?请与你的同伴议一议.

一般地,如果用 r 表示圆的半径,d 表示同一平面内点到圆心的距离,则有

$d>r\Leftrightarrow$点在圆外; $d=r\Leftrightarrow$点在圆上; $d<r\Leftrightarrow$点在圆内.

例1 如图 3-5,在 A 地正北 80 m 的 B 处有一幢民房,正西 100 m 的 C 处有一变电设施,在 BC 的中点 D 处是一古建筑. 因施工需要,必须在 A 处进行一次爆破. 为使民房、变电设施、古建筑都不遭到破坏,爆破影响面的半径应控制在什么范围内?

解 如图 3-5,连结 AD.

$\because\ \angle BAC=\mathrm{Rt}\angle$,

$\therefore\ BC^2=AC^2+AB^2$

$=100^2+80^2=16\,400$,

$\therefore\ BC=\sqrt{16\,400}=20\sqrt{41}\,(\mathrm{m})$.

$\because\ D$ 是斜边 BC 的中点,

$\therefore\ AD=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}\times 20\sqrt{41}=10\sqrt{41}\,(\mathrm{m})$.

$\because\ 10\sqrt{41}<10\times 7, AB=80\ \mathrm{m}, AC=100\ \mathrm{m}$,

$\therefore\ AD<AB<AC$.

答:爆破影响面的半径应小于 $10\sqrt{41}$ m.

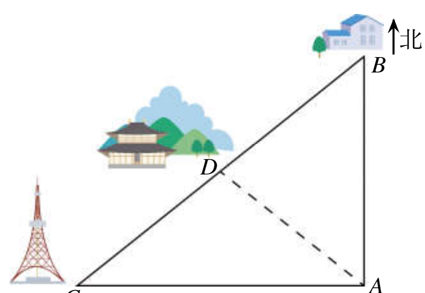


图 3-5

课内练习 KENEILIANXI

1. 作一个半径为 1.5 cm 的圆，然后画出一条直径，以及一条不等于直径的弦，再用字母和符号表示弦所对的两条弧.

2. 在直角三角形 ABC 中，$\angle C=\text{Rt}\angle$，$AC=3$ cm，$AB=5$ cm. 若以点 C 为圆心，画一个半径为 3 cm 的圆，试判断点 A，点 B 与 $\odot C$ 的位置关系.

作业题 ZUOYETI

A **1.** 下列命题中，哪些是真命题，哪些是假命题？请说明理由.

（1）直径相等的两个圆是等圆.

（2）弦是直径.

（3）圆上任意两点都能将圆分成一条劣弧和一条优弧.

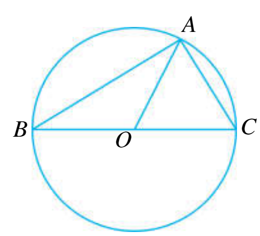
（4）一个圆有且只有一条直径.

2. 作两个等圆，使其中一个圆通过另一个圆的圆心.

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=\text{Rt}\angle$，$AO$ 是 BC 边上的中线，BC 为 $\odot O$ 的直径.

（1）点 A 是否在圆上？请说明理由.

（2）写出圆中所有的劣弧和优弧.



（第 3 题）

4. 已知 $\odot O$ 的面积为 25π.

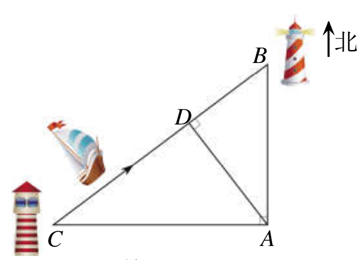
（1）若 $PO=5.5$，则点 P 在圆________.

（2）若 $PO=4$，则点 P 在圆________.

（3）若 $PO=$________，则点 P 在圆上.

B **5.** 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=AC=4$ cm，$BC=6$ cm，P 是 BC 的中点. 以 P 为圆心作一个半径为 3 cm 的圆. 试判断点 A，B，C 与 $\odot P$ 的位置关系，并说明理由.

6. 如图，在 A 岛附近，半径约 250 km 的范围内是一暗礁区，往北 300 km 有一灯塔 B，往西 400 km 有一灯塔 C. 现有一渔船沿 CB 航行，问：渔船会进入暗礁区吗？



（第 6 题）

2

合作学习 HEZUOXUEXI

如果确定了圆心和圆的半径，那么这个圆的位置和大小就被唯一确定了. 有没有其他条件，也能唯一地确定一个圆呢? 请按以下步骤探索，并动手作图试一试.

（1）经过一个已知点能作多少个圆?

（2）经过两个已知点 A, B 能作多少个圆? 过点 A, B 任意作一个圆（图 3-6），你认为圆心应该在怎样的一条直线上?

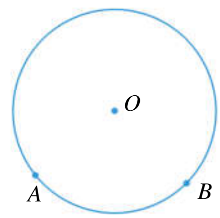


图 3-6

（3）议一议：经过不在同一条直线上的三个点一定能作出一个圆吗? 如果能，怎样找出这个圆的圆心? 经过在同一条直线上的三个点呢?

如图 3-7，点 A, B, C 不在同一条直线上，则经过点 A, B 的圆的圆心一定在线段 AB 的垂直平分线上；经过点 B, C 的圆的圆心在线段 BC 的垂直平分线上，并且这两条垂直平分线一定相交. 设交点为 O，则 $OA=OB=OC$. 所以，以点 O 为圆心，线段 OA 为半径作圆，便可得到一个经过 A, B, C 三点的圆，并且只能作一个圆.

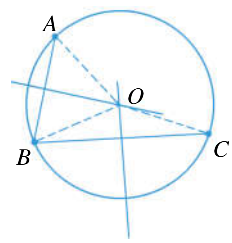


图 3-7

不在同一条直线上的三个点确定一个圆.

例2 已知△ABC（图 3-8），用直尺和圆规作出过点 A, B, C 的圆.

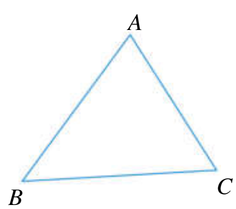


图 3-8

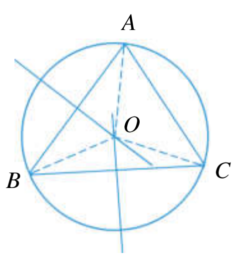


图 3-9

作法 1. 如图3-9，分别作线段 AB, BC 的垂直平分线，相交于点 O.

2. 以点 O 为圆心，OA 为半径作⊙O.

⊙O 就是所求作的圆.

经过三角形各个顶点的圆叫做**三角形的外接圆**，这个外接圆的圆心叫做**三角形的外心**，三角形叫做**圆的内接三角形**. 例如，图 3-9 中，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，$\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形，点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心.

三角形的外心是三角形三条边的垂直平分线的交点.

课内练习 KENEILIANXI

1. 一个破损的轮子如图. 现要重新浇铸一个，需先画出轮子的轮廓线(圆). 怎样画这个圆呢？试一试，并作出这个圆.

（第 1 题）

2. 任意画一个直角三角形，然后以斜边为直径画一个圆. 这个圆是直角三角形的外接圆吗？为什么？

探究活动 TANJIUHUODONG

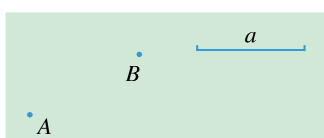
如图 3-10 这样的丁字尺可用来找圆心，你知道为什么吗？如果要用这样的丁字尺来找直径小于 AB 的圆的圆心，你认为这丁字尺应作怎样的改进？

图 3-10

作业题 ZUOYETI

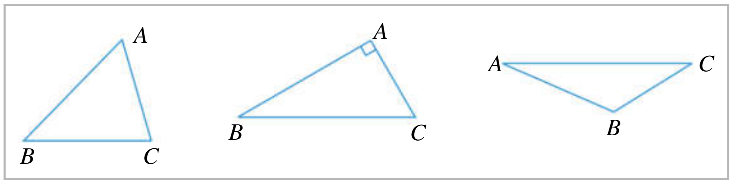
A **1.** 怎样量出一枚 1 元硬币的直径？说出你的方法，并量一量.

2. 如图，已知点 A，B 和线段 a，$a>\frac{1}{2}AB$. 用直尺和圆规作 $\odot O$，使 $\odot O$ 过点 A，B，且半径为 a. 这样的圆可以作几个？



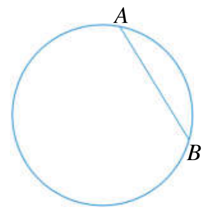
（第 2 题）

3. 作出下列三角形的外接圆，并比较这三个三角形的外心的位置. 你得到什么结论?



（第 3 题）

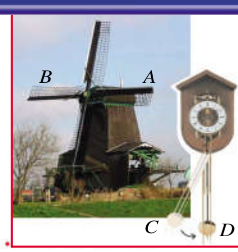
B 4. 如图，A，B 是已知圆上两点，用直尺和圆规作以 AB 为底边的圆内接等腰三角形. 这样的三角形能作几个?



（第 4 题）

5. 平面内有 4 个点，它们不在一条直线上，但有 3 个点在同一条直线上. 过其中 3 个点作圆，可以作出几个圆? 请说明理由，并作出示意图.

3·2 图形的旋转



风车叶片和钟表的指针、钟摆在转动过程中，哪些改变了? 哪些保持不变?

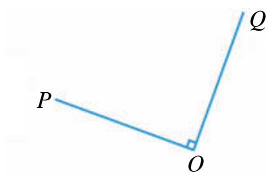
观察节前图，风车的叶片由 A 至 B 的运动与钟表的钟摆由 C 至 D 的运动. 它们都有一个共同的特点，就是运动物体上各部分都绕同一个固定的点，按同一个方向，旋转同一个角度.

一般地，一个图形变为另一个图形，在运动的过程中，原图形上的所有点都绕一个固定的点，按同一个方向，转动同一个角度，这样的图形运动叫做图形的**旋转**(rotation). 这个固定的点叫做**旋转中心**(center of rotation).

你能举出在现实生活中图形旋转的例子吗?

做一做 ZUOYIZUO

1. 如图，射线 OP 经过怎样的旋转，得到射线 OQ?



（第 1 题）

（第 2 题）

注 意

要描述一个旋转，必须指出：旋转中心，旋转的方向（顺时针或逆时针）和旋转的角度.

2. 如图所示是一双手的图片. 你认为能否经过旋转，使左手的图形与右手的图形重合？经过轴对称呢？用你的左、右手试一试.

例1　如图 3-11，O 是 $\triangle ABC$ 外一点. 以点 O 为旋转中心，将 $\triangle ABC$ 按逆时针方向旋转 $80°$，作出经旋转后的图形.

解　如图 3-11.

1. 以点 O 为旋转中心，分别把点 A, B, C 按逆时针方向旋转 $80°$，得点 A', B', C'.

2. 连结 $A'B', B'C', C'A'$.

$\triangle A'B'C'$ 就是所求作的经旋转后的图形.

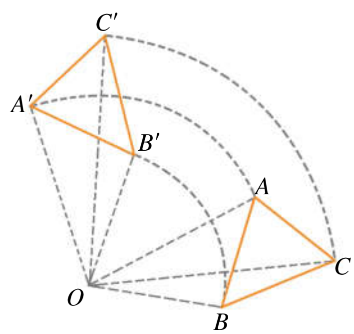


图 3-11

一般地，图形的旋转有下面的性质：

图形经过旋转所得的图形和原图形全等.

对应点到旋转中心的距离相等. 任何一对对应点与旋转中心连线所成的角度等于旋转的角度.

当图形旋转的角度为 $180°$ 时，所得的图形和原图形关于旋转中心成中心对称.

例2　已知：如图 3-12，矩形 $AB'C'D'$ 是矩形 $ABCD$ 以点 A 为旋转中心，按逆时针方向旋转 $90°$ 所得的图形.

求证：对角线 BD 与对角线 $B'D'$ 所在的直线互相垂直.

证明 如图 3-12，线段 $D'B'$ 由对角线 DB 经旋转得到. 延长 $D'B'$，交 DB 于点 E.

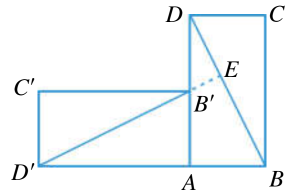


图 3-12

在矩形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=90°$，

又 $\because$ $\angle D'AD=90°$（一对对应点与旋转中心连线所成的角度等于旋转的角度），

$\therefore$ 点 D'，A，B 在同一条直线上.

$\because$ $\mathrm{Rt}\triangle D'AB'\cong \mathrm{Rt}\triangle DAB$（图形经过旋转所得的图形和原图形全等），

$\therefore$ $\angle AD'B'=\angle ADB$，

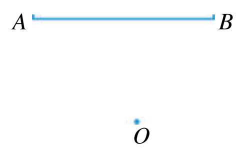
$\therefore$ $\angle AD'B'+\angle ABD=\angle ADB+\angle ABD=90°$，

$\therefore$ $\angle D'EB=180°-(\angle AD'B'+\angle ABD)=180°-90°=90°$，

即 $BD\perp B'D'$.

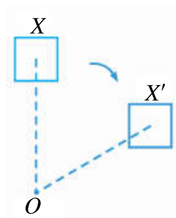
课内练习 KENEILIANXI

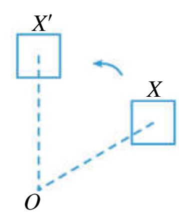
1. 如图，以点 O 为旋转中心，将线段 AB 按顺时针方向旋转 60°，作出经旋转所得的线段 $A'B'$，并求直线 $A'B'$ 与直线 AB 所成的锐角的度数.

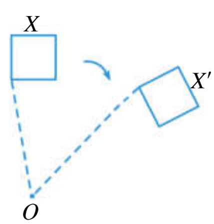


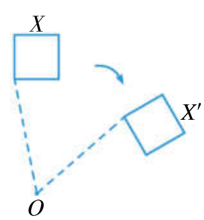
（第 1 题）

2. 下列各图中，正确表示将正方形 X 绕点 O 按顺时针方向旋转 60°的是（　　）

（A）


（B）


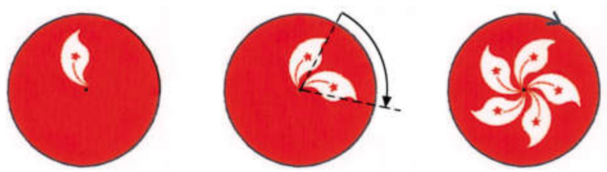
（C）


（D）


3. 如图.

（1）描述由(a)到(b)的图形变化.

（2）香港特别行政区的区徽中间紫荆花图案如图(c)所示. 观察由(a)到(c)的变化过程. 若以(a)为基础,要得到一个紫荆花图案,需经过几次旋转? 每次旋转的角度分别是多少度?



(a)　　(b)　　(c)

（第 3 题）

探究活动 TANJIUHUODONG

如图3-13,能通过图形的旋转,使图形 A 与图形 B 重合吗? 如果用两种图形的运动呢? 比如旋转和轴对称,旋转和平移等. 用扑克牌试一试,说出一种方法.

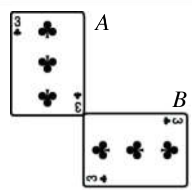


图 3-13

作业题 ZUOYETI

A **1.** 在下面横线上填写各图案从左到右的运动是平移、旋转还是轴对称.

（1）

____

（2）

____

（3）

____

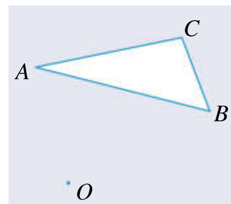
2. 分别按下列要求作出经旋转后的图形.

（第 2 题）

（1）如图，O 是线段 AB 上一点. 以点 O 为旋转中心，将线段 AB 按逆时针方向旋转 100°.

（2）如图，以点 O 为旋转中心，将扇形 P 按顺时针方向旋转 90°.

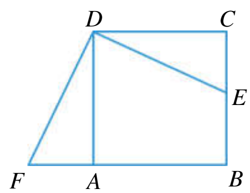
3. 如图，以点 O 为旋转中心，将△ABC 按顺时针方向旋转 60°，作出经旋转所得的图形.



（第 3 题）

B **4.** 描述从 3:15 到 4:00 时针和分针所作的图形运动.

5. 如图，E 是正方形 $ABCD$ 的 BC 边上一点，延长 BA 至点 F，使 $AF=CE$，连结 DE，DF. 能通过旋转△DEC 得到△DFA 吗？请说明理由.



（第 5 题）

PROJECT 设计题 SHEJITI

下面这两幅图案的设计思路都是先画出一个基础图形，再将这个基础图形进行旋转、轴对称、平移，并通过多次运用，形成一幅美丽的图案.

（1）图 3-14 选用怎样的基础图形，运用哪几种图形的运动形成的？图 3-15 呢？

（2）运用旋转、轴对称、平移设计一幅图案，并简单介绍你的设计思路.

图 3-14

图 3-15

3·3 垂径定理

我国历史上著名的赵州桥建于隋大业(公元 605～618)年间,桥长 64.40 m,是现存世界上跨径最大、建造最早的单孔敞肩型石拱桥. 你知道怎样确定桥拱圆弧的半径吗?

1

我们知道,圆是轴对称图形,每一条过圆心的直线都是它的对称轴.

合作学习 HEZUOXUEXI

在透明纸上任意作一个圆和这个圆的一条弦 AB,再作一条和弦 AB 垂直的直径 CD,CD 与 AB 相交于点 E(图 3-16). 然后沿着直径 CD 所在的直线把纸折叠,你发现哪些点、线段、圆弧互相重合? 你能将你的发现归纳成一般的结论吗?

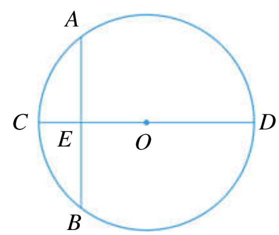


图 3-16

一般地,圆有下面的性质:

垂径定理　**垂直于弦的直径平分这条弦,并且平分弦所对的弧.**

选学 [1]如图 3-17,CD 是⊙O 的直径,$AB\perp CD$ 于点 E,连结 AO,BO,则 $AO=BO$.

在等腰三角形 OAB 中,$OC\perp AB$,得 $AE=BE$(为什么?). 所以把图 3-17 沿直径 CD 对折时,因为 $\angle AEO=\angle BEO=\mathrm{Rt}\angle$,所以射线 EA 与射线 EB 重合,可知点 A 与点 B 重合,则 $\overset{\frown}{AC}$ 与 $\overset{\frown}{BC}$,$\overset{\frown}{AD}$ 与 $\overset{\frown}{BD}$ 分别重合,所以 $\overset{\frown}{AC}$ 与 $\overset{\frown}{BC}$,$\overset{\frown}{AD}$ 与 $\overset{\frown}{BD}$ 分别相等,记做 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$,$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$. 这样便证明了垂径定理.

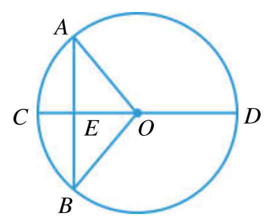


图 3-17

分一条弧成相等的两条弧的点,叫做这条**弧的中点**. 例如图 3-17 中,C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点,D 是 $\overset{\frown}{ADB}$ 的中点.

[1] 垂径定理的证明为选学内容.

例1 已知$\overset{\frown}{AB}$(图 3-18),用直尺和圆规作这条弧的中点.

图 3-18

分析 要平分$\overset{\frown}{AB}$,只要画垂直于弦 AB 的直径,而这条直径应在弦 AB 的垂直平分线上. 因此,画弦 AB 的垂直平分线就能把$\overset{\frown}{AB}$平分.

作法 如图 3-19.

1. 连结 AB.

2. 作 AB 的垂直平分线 CD,交 $\overset{\frown}{AB}$ 于点 E.

点 E 就是所求作的 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点.

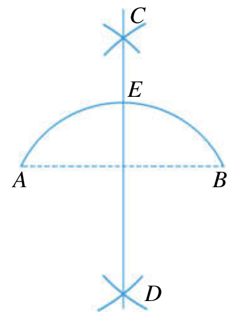


图 3-19

例2 一根排水管的截面如图 3-20 所示. 已知排水管的半径 $OB=10$,水面宽 $AB=16$. 求截面圆圆心 O 到水面的距离 OC.

解 由题意,$OC\perp AB$,

$\therefore \quad AC=BC=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\times 16=8.$

由勾股定理,得

$OC=\sqrt{OB^2-BC^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6.$

答:截面圆圆心 O 到水面的距离为 6.

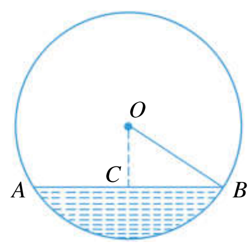


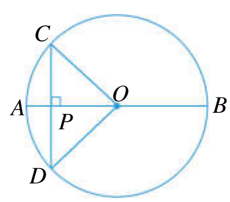
图 3-20

圆心到圆的一条弦的距离叫做**弦心距**. 例如,图 3-20 中,OC 的长就是弦 AB 的弦心距.

课内练习 KENEILIANXI

1. 已知:如图,在$\odot O$ 中,AB 是$\odot O$ 的直径,$OA\perp CD$ 于点 P.

求证:$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$.



(第 1 题)

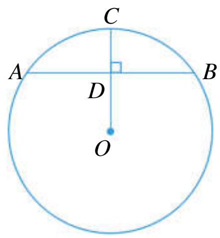
2. 已知$\odot O$ 的半径为 13 cm,一条弦的弦心距为 5 cm. 求这条弦的长.

作业题 ZUOYETI

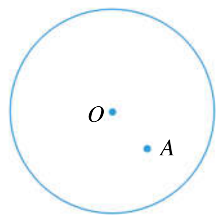
A **1.** $\odot O$ 的弦 AB 的长为 8 cm，弦 AB 的弦心距为 3 cm，则 $\odot O$ 的半径为(　　)

（A）4 cm.　　（B）5 cm.　　（C）8 cm.　　（D）10 cm.

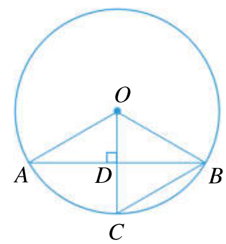
2. 如图，在 $\odot O$ 中，半径 $OC \perp AB$ 于点 D. 已知 $\odot O$ 的半径为 2，$AB=3$. 求 DC 的长(精确到 0.01).



（第 2 题）



（第 3 题）



（第 4 题）

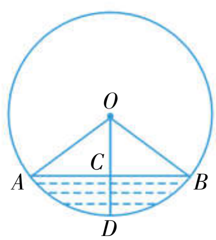
3. 过已知 $\odot O$ 内一点 A 作弦，使 A 是该弦的中点，然后作出弦所对的两条弧的中点.

4. 如图，在 $\odot O$ 中，弦 AB 垂直平分半径 OC.

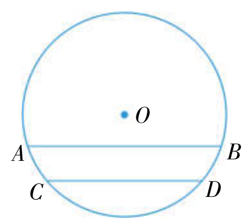
（1）求 $\angle C$ 的度数.

（2）若 $\odot O$ 的半径为 r，求弦 AB 的长.

B **5.** 一个底部呈球形的烧瓶，球的半径为 5 cm，瓶内液体的最大深度 $CD=2$ cm(如图). 求截面圆中弦 AB 的长.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 已知：如图，在 $\odot O$ 中，弦 $AB /\!/ CD$. 求证：$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

C **7.** 点 A 在 $\odot O$ 内，过点 A 作一条弦 BC，使 BC 是所有过点 A 的弦中最短的弦.

2

前面我们学过,垂直于弦的直径平分这条弦.反过来,平分弦的直径一定垂直于这条弦吗?平分弧的直径一定垂直于弧所对的弦吗?画图试一试.

我们有下面的定理:

定理 1　**平分弦(不是直径)的直径垂直于弦,并且平分弦所对的弧.**

定理 2　**平分弧的直径垂直平分弧所对的弦.**

下面我们先给出定理 1 的证明.

已知:如图 3-21,⊙O 的直径 CD 交弦 AB(不是直径)于点 P,$AP=BP$.

求证:$CD\perp AB$,$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$.

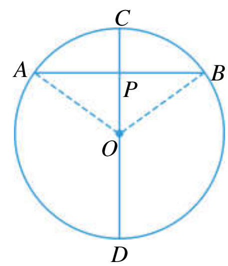


图 3-21

证明　连结 OA,OB,则 $AO=BO$,

$\therefore$　$\triangle AOB$ 是等腰三角形.

$\because$　$AP=BP$,

$\therefore$　$CD\perp AB$,

$\therefore$　$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$(垂直于弦的直径平分弦所对的弧).

如图 3-21,当$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$时,将图形沿直径 CD 所在的直线对折,则$\overset{\frown}{AC}$与$\overset{\frown}{BC}$重合.所以点 A 与点 B 重合,即 A,B 关于直线 CD 对称,所以 CD 垂直平分弦 AB,这就证明了定理 2.

例3　已知赵州桥的跨径(桥拱圆弧所对的弦的长)为 37.02 m,拱高(桥拱圆弧的中点到弦的距离)为 7.23 m.求赵州桥的桥拱圆弧的半径(精确到 0.1 m).

解　如图 3-22,用$\overset{\frown}{AB}$表示桥拱圆弧,设$\overset{\frown}{AB}$所在圆的圆心为 O,半径为 R(m).C 为$\overset{\frown}{AB}$的中点,连结 OC,交 AB 于点 D,就有 OC 垂直平分 AB.所以 CD 就是拱高.由题意,得

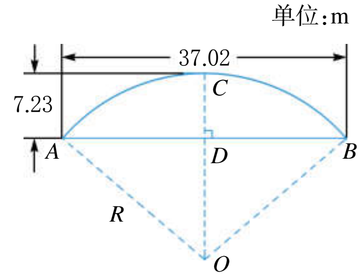


图 3-22

$AB=37.02$ m,$CD=7.23$ m,

$\therefore$　$AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 37.02=18.51$(m),

$OD=OC-DC=(R-7.23)(\text{m})$.

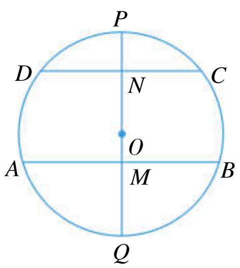
在 Rt$\triangle OAD$ 中，$OA^2=AD^2+OD^2$，

$\therefore\quad R^2=18.51^2+(R-7.23)^2$，

解这个方程，得 $R\approx 27.3$.

答：赵州桥的桥拱圆弧的半径约为 27.3 m.

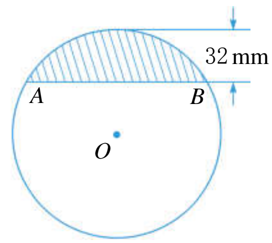
课内练习 KENEILIANXI



（第 1 题）

1. 已知：如图，$\odot O$ 的直径 PQ 分别交弦 AB，CD 于点 M，N，$AM=BM$，$AB\parallel CD$. 求证：$DN=CN$.

2. 如图，在直径为 130 mm 的圆形铁片上切下一块高为 32 mm 的弓形[1]铁片，求弓形的弦 AB 的长.



（第 2 题）

探究活动 TANJIUHUODONG

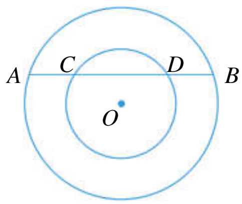
某一公路隧道的形状如图 3-23 所示，半圆拱的圆心距离地面 2 m，半径为 1.5 m. 一辆高 3 m，宽 2.3 m 的集装箱卡车能顺利通过这个隧道吗？如果要使高度不超过 4 m，宽为 2.3 m 的大货车也能顺利通过这个隧道，且不改变圆心到地面的距离，半圆拱的半径至少为多少米？

图 3-23

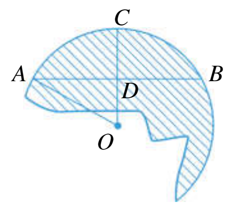
[1] 弓形是圆弧和它所对的弦围成的图形，弓形的高是指弧的中点到弦的距离.

作业题 ZUOYETI

A **1.** 已知：如图，在以点 O 为圆心的两个圆中，大圆的弦 AB 和小圆交于点 C,D. 求证：$AC=BD$.



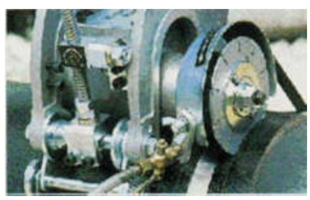
（第 1 题）

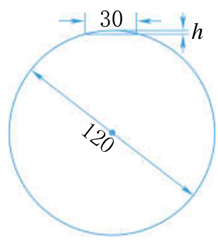


（第 2 题）

2. 如图，破残的轮子上，弓形的弦 AB 为 4 cm，高 CD 为 1 cm. 求这个轮子的直径长.

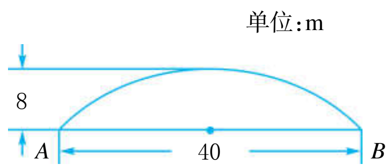
3. 要在直径为 120 mm 的轴上铣出宽为 30 mm 的一块平面（如图），吃刀深度 h 为多少(精确到 0.1 mm)?





（第 3 题）

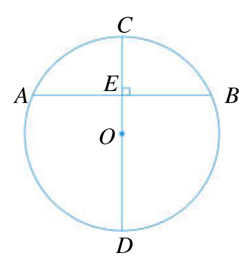
4. 如图，一圆弧形钢梁的拱高为 8 m，跨径为 40 m. 求这钢梁圆弧的半径长.



（第 4 题）

B **5.** 如图，$\odot O$ 的直径 CD 垂直弦 AB 于点 E，且 $CE=3$ cm，$DE=7$ cm. 求 AB 的长.

6. 已知 $\odot O$ 的半径为 5 cm，弦 $AB \parallel CD$，$AB=6$ cm，$CD=8$ cm. 求 AB 与 CD 之间的距离.



（第 5 题）

3·4 圆心角

墙上的图案用圆弧设计而成. 怎样画这个图案?

1

把圆绕圆心旋转 180°,所得的图形与原图形重合,所以圆是中心对称图形,圆心就是它的对称中心. 不仅如此,由于圆上所有的点到圆心的距离都相等,因此把圆绕圆心旋转任意一个角度,所得的图形都和原图形重合.

顶点在圆心的角叫做**圆心角**(central angle). 例如,图 3-24 中,$\angle NON'$就是一个圆心角.

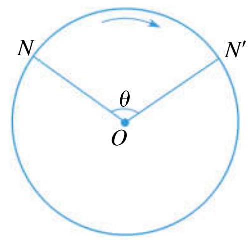


图 3-24

合作学习 HEZUOXUEXI

如图 3-25,在⊙O 中,已知圆心角$\angle AOB$ 和圆心角$\angle COD$ 相等.

设计一个实验, 探索两个相等的圆心角所对的两段弧、两条弦之间有什么关系.

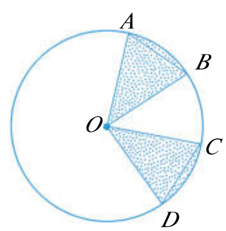


图 3-25

圆心角定理　**在同圆或等圆中,相等的圆心角所对的弧相等,所对的弦也相等.**

已知:如图 3-25,在⊙O 中,$\angle AOB=\angle COD$.

求证:$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$,$AB=CD$.

证明　设$\angle AOC=\alpha$.

$\because$　$\angle AOB=\angle COD$,

$\therefore \quad \angle BOD=\angle BOC+\angle COD=\angle BOC+\angle AOB=\alpha.$

将扇形 AOB 按顺时针方向旋转 α 角后，点 A 与点 C 重合，点 B 与点 D 重合. 根据圆的旋转的性质，$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{CD}$重合，弦 AB 也与弦 CD 重合. 所以$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，$AB=CD$.

如果以$\odot O$ 的圆心 O 为端点作 360 条射线，把以 O 为顶点的周角 360 等分，那么根据圆心角定理，这些射线也把圆 360 等分. 每相邻两条射线所成的圆心角是 1°的角，我们把 1°圆心角所对的弧叫做 1°的弧. 这样，n°的圆心角所对的弧就是 n°的弧(图 3-26).

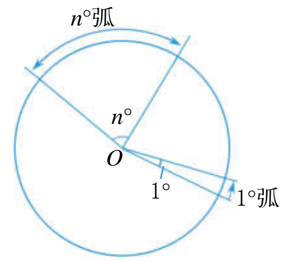
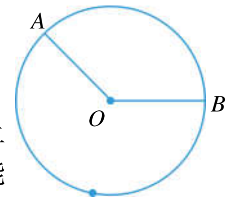


图 3-26

做一做 ZUOYIZUO

1. 如图，在$\odot O$ 中，$\angle AOB=135°$. 求$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{ACB}$的度数.

2. 任意画两个半径不相等的圆，然后在每一个圆上任意取一段 90°的弧. 这两段弧的度数相等吗？能说这两段弧相等吗？为什么？



(第 1 题)

例1 用直尺和圆规把$\odot O$(图 3-27)四等分.

分析 因为在同圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所以要把圆四等分，只要把以圆心 O 为顶点的周角四等分，这只要作两条互相垂直的直径即可.

作法 如图 3-28.

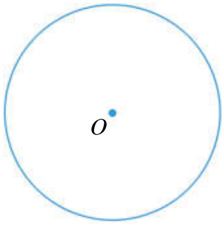


图 3-27

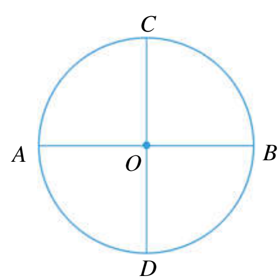


图 3-28

1. 作$\odot O$ 的一条直径 AB.
2. 过点 O 作 $CD\perp AB$，交$\odot O$ 于点 C 和点 D.

点 A，B，C，D 就把$\odot O$ 四等分.

例2 求证：**在同圆或等圆中，相等的圆心角所对两条弦的弦心距相等.**

已知：如图 3-29，在⊙O 中，$\angle AOB=\angle COD$，OE 是弦 AB 的弦心距，OF 是弦 CD 的弦心距.

求证：$OE=OF$.

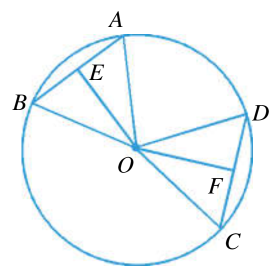


图 3-29

证明 $\because$ $\angle AOB=\angle COD$，

$\therefore$ $AB=CD$（圆心角定理）.

$\because$ $OE\perp AB$，

$\therefore$ $AE=BE=\frac{1}{2}AB$（根据什么？）.

同理，由 $OF\perp DC$，得 $DF=CF=\frac{1}{2}CD$.

$\therefore$ $AE=DF$.

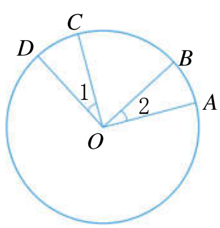
又 $\because$ $OA=OD$，

$\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle AOE\cong\mathrm{Rt}\triangle DOF$，

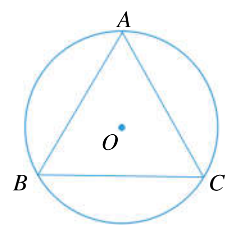
$\therefore$ $OE=OF$.

课内练习 KENEILIANXI

1. 已知：如图，$\angle 1=\angle 2$. 求证：$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.



（第 1 题）

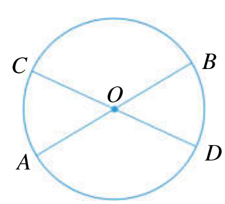


（第 2 题）

2. 如图，等边三角形 ABC 内接于⊙O. 求$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{AC}$的度数.

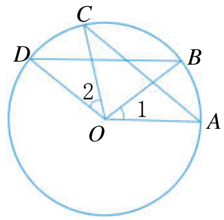
作业题 ZUOYETI

A **1.** 如图，AB，CD 是⊙O 的两条直径. 找出图中各对相等的弧（半圆和优弧除外），并说明理由.

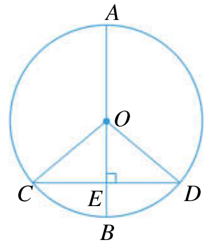


（第 1 题）

2. 已知：如图，A，B，C，D 是 $\odot O$ 上的点，$\angle 1=\angle 2$. 求证：$AC=BD$.



（第 2 题）



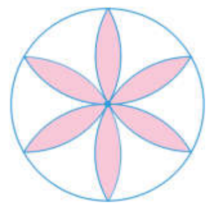
（第 3 题）

3. 如图，$\odot O$ 的直径 AB 垂直于弦 CD 于点 E，$\angle COD=100°$. 求 $\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{AD}$ 的度数.

B 4. 解答节前语中的问题，并画出示意图.

5. 任意画一个圆，用量角器把它三等分.

6. 观察如图的图案，画法中运用了圆的几等分？请利用圆的等分制作一幅美丽的图案.


（第 6 题）

2

我们已经知道，在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦及其弦心距也分别相等. 反过来，在同圆或等圆中，相等的弧所对的圆心角相等吗？相等的弦或弦心距所对的圆心角相等吗？画出相应图形，并说明你的结论和理由.

（可与你的同伴交流）

在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦、两个弦心距中有一对量相等，那么它们所对应的其余各对量都相等.

如图3-30，

$\angle AOB=\angle COD$

$\Leftrightarrow AB=CD$

$\Leftrightarrow OE=OF$

$\Leftrightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.

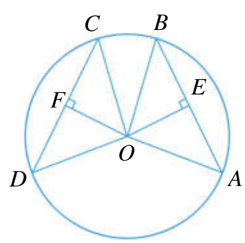


图 3-30

例3 如图 3-31，等边三角形 ABC 内接于⊙O，连结 OA，OB，OC，延长 AO，分别交 BC 于点 P，交$\overset{\frown}{BC}$于点 D. 连结 BD，CD. 判断四边形 $BDCO$ 是哪一种特殊四边形，并给出证明.

解 四边形 $BDCO$ 是菱形. 证明如下：

∵ $AB=BC=CA$，

∴ $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120°$（根据什么？），

∴ $\angle BOD=180°-\angle AOB=180°-120°=60°$.

又 ∵ $OB=OD$，

∴ $\triangle BOD$ 是等边三角形.

同理，$\triangle COD$ 是等边三角形.

∴ $OB=OC=BD=CD$，即四边形 $BDCO$ 是菱形.

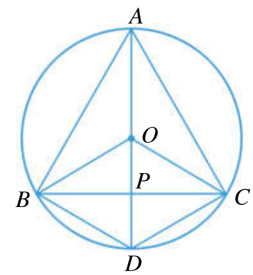


图 3-31

例4 已知：如图 3-32，$\triangle ABC$ 为等边三角形，以 AB 为直径的⊙O 分别交 AC，BC 于点 D，E. 求证：$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EB}$.

分析 连结 OD，OE. 这样我们只要证明 $\angle AOD=\angle DOE=\angle BOE$，就能得到 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EB}$.

证明 如图 3-32，连结 OD，OE.

在等边三角形 ABC 中，$\angle A=60°$.

∵ $OA=OD$，

∴ $\triangle AOD$ 是等边三角形.

∴ $\angle AOD=60°$.

同理，$\angle BOE=60°$.

∴ $\angle DOE=180°-\angle AOD-\angle BOE$

$=180°-60°-60°=60°$，

∴ $\angle AOD=\angle DOE=\angle BOE$，

∴ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EB}$（根据什么？）.

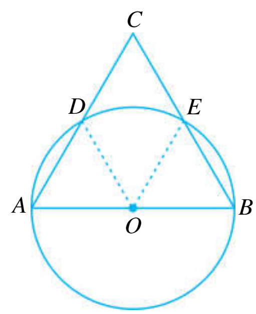
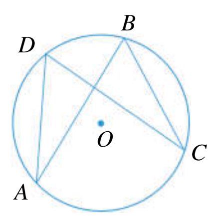


图 3-32

课内练习 KENEILIANXI

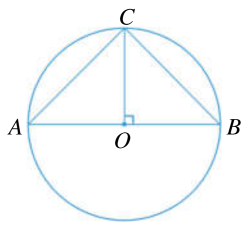
1. 求半径为 r 的圆的内接等边三角形的边长.
2. 已知：如图，在⊙O 中，$AB=CD$.
   求证：$AD=BC$.



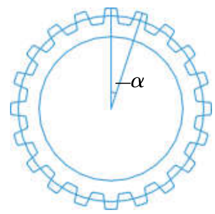
（第 2 题）

作业题 ZUOYETI

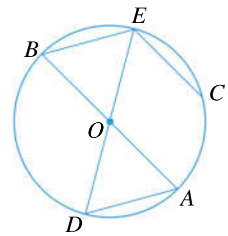
A **1.** 如图，AB 是⊙O 的直径，$OC\perp AB$，交⊙O 于点 C. 判断△ABC 是哪一种特殊的三角形，并说明理由.



（第 1 题）



（第 2 题）

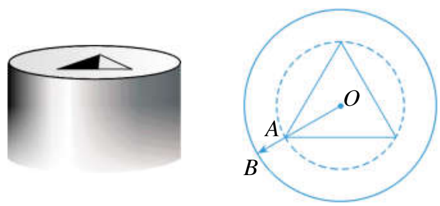


（第 3 题）

2. 如图的齿轮有 20 个齿，每两齿之间间隔相等. 相邻两齿间的圆心角 α 为多少度？如果让这样的齿轮旋转 1 周，那么在旋转过程中有多少次和原图形重合？

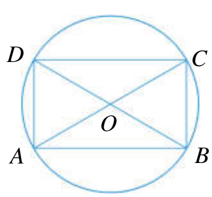
3. 已知：如图，AB，DE 是⊙O 的直径，C 是⊙O 上一点，且$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CE}$. 求证：$BE=CE$.

B **4.** 在一根轴的正中位置打一个正三角形孔（如图），正三角形的边长为 15 cm，AB 长为 5 cm. 求这根轴的直径.

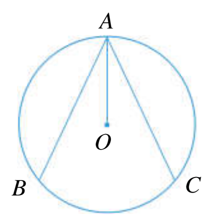


（第 4 题）

5. 如图，在直径为 10 cm 的⊙O 中，直径 AC 与 BD 所成的角 $\angle AOB=120°$. 求四边形 $ABCD$ 的周长和面积.



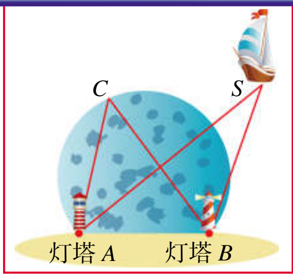
（第 5 题）



（第 6 题）

6. 已知：如图，AB，AC是⊙O 的两条弦，OA 平分$\angle BAC$.
求证：$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$.

3·5 圆周角



一个弓形暗礁区的形状如图所示，$\angle C=50°$. 船在航行时怎样才能避开暗礁区？

1

如图 3-33，$\angle BAC$ 的顶点在圆上，它的两边都和圆相交. 像这样的角叫做**圆周角**（inscribed angle）. 图 3-33 中还有哪些圆周角？

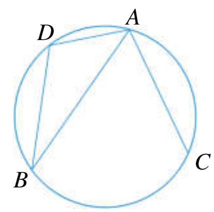


图 3-33

合作学习 HEZUOXUEXI

如图 3-34，量出圆周角 $\angle BAC$ 与它所对弧上的圆心角 $\angle BOC$ 的度数，两者之间有什么关系？当点 A 在 $\overset{\frown}{BEC}$ [1]上移动的过程中，$\angle BAC$ 与圆心 O 有几种不同的位置关系？量一量每次变化后 $\angle BAC$ 的度数，你发现了什么？给出你的猜想.

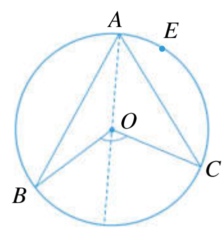


图 3-34

圆周角定理　**圆周角的度数等于它所对弧上的圆心角度数的一半.**

已知：$\angle BOC$，$\angle BAC$ 分别是同一条弧所对的圆心角和圆周角.

求证：$\angle BAC=\dfrac{1}{2}\angle BOC$.

分析　由于圆心有在圆周角内、圆周角外和圆周角的一条边上三类情况，因此需分别对三类不同情况给出证明.

[1] 在不能确定是劣弧的情况下，一般需用三个字母来表示弧.

证明 （1）当圆心 O 在圆周角 $\angle BAC$ 的一边 AB 上时(图 3-35)，

$\because$ $OA=OC$，

$\therefore$ $\angle BAC=\angle C$.

$\because$ $\angle BOC$ 是 $\triangle OAC$ 的外角，

$\therefore$ $\angle BOC=\angle C+\angle BAC=2\angle BAC$，

$\therefore$ $\angle BAC=\dfrac{1}{2}\angle BOC$.

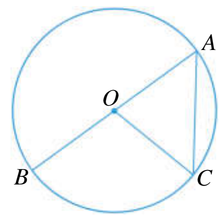


图 3-35

（2）当圆心 O 在圆周角 $\angle BAC$ 的内部时(图 3-36)，连结 AO 并延长，交 $\odot O$ 于点 D. 利用(1)的结果，有

$$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD,\ \angle DAC=\frac{1}{2}\angle DOC,$$

$\therefore$ $\angle BAD+\angle DAC=\dfrac{1}{2}(\angle BOD+\angle DOC)$，

即 $\angle BAC=\dfrac{1}{2}\angle BOC$.

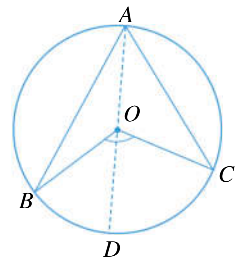


图 3-36

（3）当圆心 O 在圆周角 $\angle BAC$ 的外部时(图 3-37)，连结 AO 并延长，交 $\odot O$ 于点 D. 利用(1)的结果，有

$$\angle DAC=\frac{1}{2}\angle DOC,\ \angle DAB=\frac{1}{2}\angle DOB,$$

$\therefore$ $\angle DAC-\angle DAB=\dfrac{1}{2}(\angle DOC-\angle DOB)$，

即 $\angle BAC=\dfrac{1}{2}\angle BOC$.

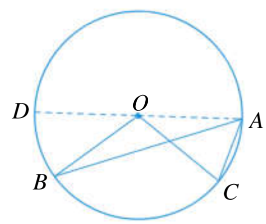


图 3-37

如图 3-38，若 AB 是 $\odot O$ 的直径，则半圆 $\overset{\frown}{ADB}$ 所对的圆心角是平角 $\angle AOB$. 根据圆周角定理，半圆 $\overset{\frown}{ADB}$ 所对的圆周角 $\angle C$ 等于 $\angle AOB$ 的一半，即 $\angle C=90°$. 反过来，若 $\angle C$ 是直角，则 $\angle AOB=180°$，所以点 A,O,B 在一条直线上，AB 是 $\odot O$ 的直径.

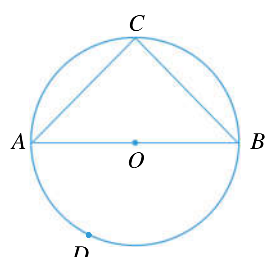


图 3-38

由此我们得到圆周角定理的一个推论：

半圆(或直径)所对的圆周角是直角.

90°的圆周角所对的弦是直径.

例1 如图 3-39,等腰三角形 ABC 的顶角 $\angle BAC$ 为 $50°$,以腰 AB 为直径作半圆,交 BC 于点 D,交 AC 于点 E. 求 $\overset{\frown}{BD}$,$\overset{\frown}{DE}$ 和 $\overset{\frown}{AE}$ 的度数.

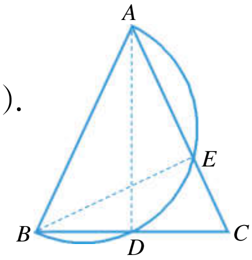


图 3-39

解 如图 3-39,连结 BE, AD.

$\because$ AB 是圆的直径,

$\therefore$ $\angle AEB=\angle ADB=90°$(直径所对的圆周角是直角).

$\because$ $\angle BAC=50°$,

$\therefore$ $\angle ABE=90°-\angle BAC=90°-50°=40°$.

又 $\because$ $\triangle ABC$ 是等腰三角形,

$\therefore$ $\angle BAD=\angle CAD=\dfrac{1}{2}\angle BAC=\dfrac{1}{2}\times 50°=25°$.

由圆周角定理,得 $\overset{\frown}{BD}\overset{m}{=}$[1]$2\angle BAD=2\times 25°=50°$,

$\overset{\frown}{DE}\overset{m}{=}2\angle CAD=2\times 25°=50°$, $\overset{\frown}{AE}\overset{m}{=}2\angle ABE=2\times 40°=80°$.

课内练习 KENEILIANXI

1. 已知一条弧所对的圆周角等于 $50°$,则这条弧所对的圆心角是多少度?

2. 已知一条弧的度数为 $40°$. 求这条弧所对的圆心角和圆周角的度数.

3. 只给你一把三角尺,你能找出一个圆(如图)的圆心吗? 试一试.

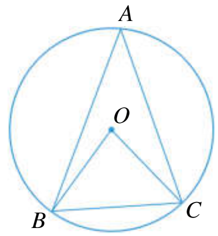
(第 3 题)

[1] 符号“$\overset{m}{=}$”表示角与弧的度数相等.

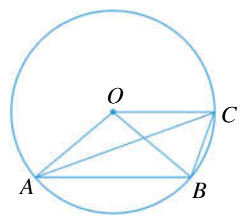
作业题 ZUOYETI

A **1.** 一条弧所对的圆心角的度数为 95°. 求这条弧的度数和这条弧所对的圆周角的度数.

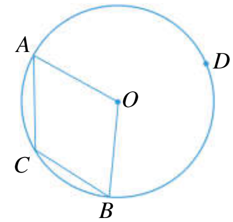
2. 如图，$\angle A$ 是 $\odot O$ 的圆周角，$\angle A=40°$. 求 $\angle OBC$ 的度数.



（第 2 题）



（第 3 题）

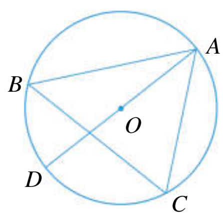


（第 4 题）

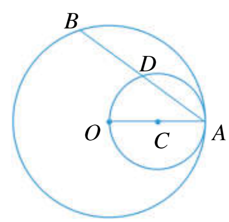
3. 如图，在 $\odot O$ 中，$\angle AOC=140°$，$\angle ACB=50°$. 求 $\angle BAC$ 的度数.

4. 如图，C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 上一点，$\angle AOB=n°$. 求 $\angle ACB$ 的度数.

B **5.** 如图，$\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形，AD 是 $\odot O$ 的直径，$\angle ABC=50°$. 求 $\angle CAD$ 的度数.



（第 5 题）



（第 6 题）

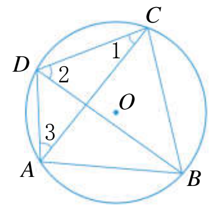
6. 已知：如图，OA 是 $\odot O$ 的半径，以 OA 为直径的 $\odot C$ 与 $\odot O$ 的弦 AB 相交于点 D. 求证：$AD=DB$.

2

我们知道，在同圆或等圆中，等弧所对的圆心角相等，相等的圆心角所对的弧也相等，所以根据圆周角定理还可以得到另一个推论：

在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等；相等的圆周角所对的弧也相等.

做一做 ZUOYIZUO



如图，四边形 $ABCD$ 的四个顶点在 $\odot O$ 上. 找出图中分别与 $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ 相等的角.

例2 已知：如图 3-40，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$\angle ACB = 2\angle ABC$，点 D 平分 $\overset{\frown}{AB}$. 求证：$AC = BD$.

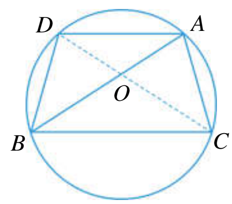


图 3-40

证明 如图 3-40，连结 CD.

$\because\ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$,

$\therefore\ \angle ACD = \angle BCD = \dfrac{1}{2}\angle ACB$（在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等）.

$\because\ \angle ABC = \dfrac{1}{2}\angle ACB$,

$\therefore\ \angle ABC = \angle BCD$.

$\therefore\ \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$（在同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧相等），

$\therefore\ AC = BD$.

下面我们来考虑节前语中的问题.

例3 如图 3-41，有一个弓形的暗礁区，弓形所在圆的圆周角 $\angle C = 50°$. 问：船在航行时怎样才能保证不进入暗礁区？

分析 由于暗礁区的圆心位置没有标明，怎样避开暗礁，可以从测量船到两个灯塔的张角（$\angle ASB$）去考虑. 船与暗礁区的相对位置可以通过 $\angle ASB$ 与 $\angle ACB$ 的大小关系来确定. 请你自己写出求解过程.

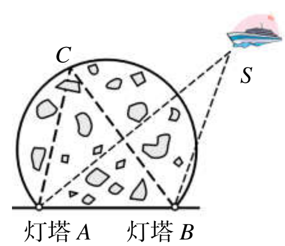
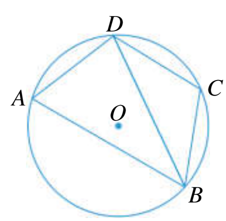


图 3-41

课内练习 KENEILIANXI



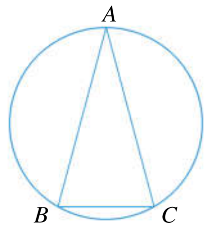
（第 2 题）

1. 求证：圆的两条平行弦所夹的弧相等.

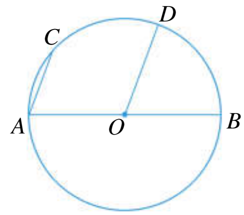
2. 已知：如图，四边形 $ABCD$ 的顶点都在 $\odot O$ 上，BD 平分 $\angle ABC$，且 $AB /\!/ CD$. 求证：$BC = CD$.

作业题 ZUOYETI

A **1.** 如图，$\triangle ABC$ 内接于圆，$AB=AC$，$\overset{\frown}{BC}$的度数为 $60°$. 求$\angle B$，$\angle C$ 的度数.



（第 1 题）

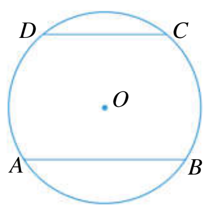


（第 2 题）

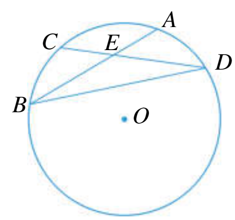
2. 已知：如图，AB 是$\odot O$ 的直径，弦 AC 与半径 OD 平行.

求证：$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$.

3. 已知：如图，CD，AB 是$\odot O$ 的两条弦，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$. 求证：$CD/\!/AB$.



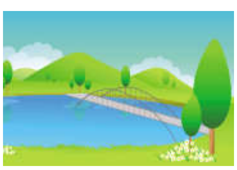
（第 3 题）

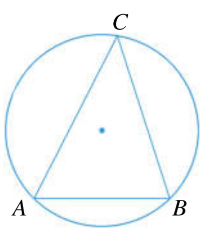


（第 4 题）

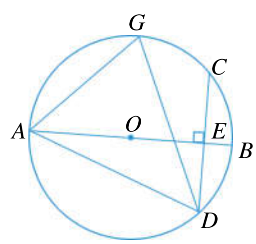
4. 已知：如图，在$\odot O$ 中，$AB=CD$. 求证：$\angle ABD=\angle CDB$.

B **5.** 一个圆形人工湖如图所示，弦 AB 是湖上的一座桥. 已知 AB 长为 $100\,\text{m}$，圆周角$\angle C=45°$. 求这个人工湖的直径.





（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，AB 是$\odot O$ 的直径，弦 $CD\perp AB$ 于点 E，G 是$\overset{\frown}{AC}$上任意一点，连结 AD，GD. 找出图中和$\angle ADC$ 相等的角，并给出证明.

生活离不开圆

人们的生活离不开圆.车轮设计成圆形(图 3-42),这是因为圆周上的点到圆心的距离都相等,车子行驶起来平稳,并且圆形的车轮滚动时摩擦力小,行驶起来比较省力.如果把车轮做成三角形、四边形或者椭圆,那么可以想象汽车在行驶的时候颠上颠下,谁都难以忍受这种折腾.

图 3-42

数学上可以证明在周长相等的所有封闭曲线中,圆围成的面积最大.因此所有底面周长相等、高相等的柱体容器中,圆柱形容器的容积最大.根据这个原理,自来水管、搪瓷杯等一般都做成圆柱形.而把锅盖、碗盖(图 3-43)做成圆形,这是为了使各个方向都容易密合,使用较为方便.

图 3-43

图 3-44

有的拱形门和屋顶做成半圆形(图 3-44),是因为圆形建筑的抗压能力强.

圆还给人以和谐、匀称的观感,是一种很美的图形,所以常被人们用来绘制各种美丽的图案(图 3-45).

你能自己发现一些圆在现实生活中应用的例子吗?

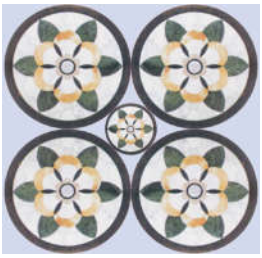


图 3-45

3·6 圆内接四边形

怎样把圆柱形原木锯成截面为正方形的木材，并使截面正方形的面积尽可能地大？

合作学习 HEZUOXUEXI

任意画一个圆，在圆上依次取四个点 A,B,C,D，连结 AB,BC,CD,DA. 用量角器量出四边形 $ABCD$ 任意一组对角的度数之和，你发现了什么？你的同伴是否有同样的发现？

如果一个四边形的各个顶点在同一个圆上，那么这个四边形叫做**圆的内接四边形**(cyclic quadrilateral)，这个圆叫做四边形的**外接圆**(circumscribed circle). 例如，在图 3-46 中，四边形 $ABCD$ 是⊙O 的内接四边形，⊙O 是四边形 $ABCD$ 的外接圆.

圆内接四边形有以下性质定理：

圆内接四边形的对角互补.

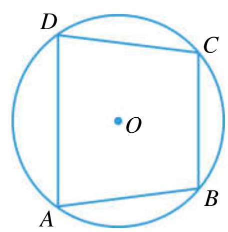


图 3-46

已知：如图 3-46，四边形 $ABCD$ 内接于⊙O.

求证：$\angle A+\angle C=180°$，$\angle B+\angle D=180°$.

证明　把 $\angle A$ 所对的弧记做 $\overset{\frown}{BCD}$，$\angle C$ 所对的弧记做 $\overset{\frown}{BAD}$，

则 $\angle A \overset{m}{=} \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}$，$\angle C \overset{m}{=} \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BAD}$.

∵　$\overset{\frown}{BCD}$ 与 $\overset{\frown}{BAD}$ 的度数之和是 $360°$，

∴　$\angle A+\angle C \overset{m}{=} \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}+\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BAD}=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{BCD}+\overset{\frown}{BAD})=\dfrac{1}{2}\times 360°=180°$.

同理可证 $\angle B+\angle D=180°$.

做一做 ZUOYIZUO

1. 已知圆内接四边形有一个内角是 $50°$,求它的对角的度数.

2. 若⊙O 的内接四边形 $ABCD$ 满足 $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$, 则四边形 $ABCD$ 是怎样的特殊平行四边形?

例1 已知:如图 3-47,AD 是△ABC 的外角 $\angle EAC$ 的平分线,与△ABC 的外接圆交于点 D. 求证:$DB=DC$.

分析 要证明 $DB=DC$,只需证明 $\angle DBC=\angle DCB$. 根据“在同圆中,同弧所对的圆周角相等”,得 $\angle DBC=\angle DAC$. 又根据“圆内接四边形的对角互补”和“同角的补角相等”,可得 $\angle DCB=\angle DAE$. 而已知 $\angle DAC=\angle DAE$,这就证明了 $\angle DBC=\angle DCB$.

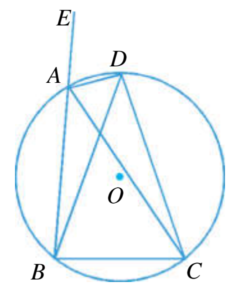


图 3-47

证明 ∵ AD 是 $\angle EAC$ 的平分线,

∴ $\angle DAC=\angle DAE$.

∵ 四边形 $ABCD$ 内接于圆 O,

∴ $\angle BAD+\angle DCB=180°$ (圆内接四边形的对角互补).

∴ $\angle DCB=\angle DAE$ (根据什么?).

而 $\angle DAC=\angle DBC$ (在同圆中,同弧所对的圆周角相等),

∴ $\angle DCB=\angle DBC$,

∴ $DB=DC$.

例2 如果要把横截面直径为 30 cm 的圆柱形原木锯成一根横截面为正方形的木材,并使截面尽可能地大,应怎样锯? 如果这根原木长 15 m,问:锯出的木材的体积为多少立方米(树皮等损耗略去不计)?

解 设原木的横截面为⊙O(图 3-48). 要使锯出的木材的横截面正方形 $ABCD$ 尽可能地大, 正方形 $ABCD$ 应内接于⊙O. 由正方形 $ABCD$ 四个内角都是直角,得它的两条对角线是⊙O 的两条直径,且这两条直径互相垂直. 所以只要在⊙O 内作两条互相垂直的直径 AC 和 BD,就可以作出⊙O 的内接正方形 $ABCD$.

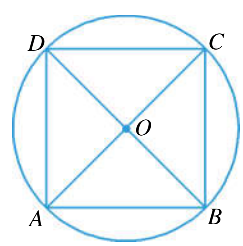


图 3-48

当原木的直径为 30 cm 时，$AO=BO=15$ cm，

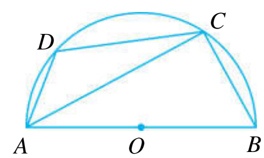
正方形 $ABCD$ 的面积为

$$4\times\frac{1}{2}\times AO\times BO=4\times\frac{1}{2}\times15\times15=450(\text{cm}^2)$$
$$=4.50\times10^{-2}(\text{m}^2).$$

所以木材的体积为$4.50\times10^{-2}\times15=0.675(\text{m}^3)$.

答：如图 3-48，沿正方形 $ABCD$ 的四条边，就可以锯出符合要求的截面为正方形的木材. 如果这根原木长15 m，那么锯出木材的体积为0.675 m^3.

课内练习 KENEILIANXI



（第 1 题）

1. 如图，AB 是半圆 O 的直径，$\angle BAC=40°$. 求 $\angle D$ 的大小.

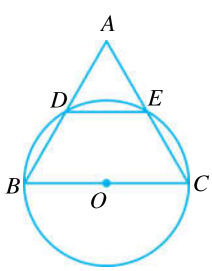
2. 已知圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle A:\angle B:\angle C=2:3:7$. 求 $\angle D$ 的大小.

3. 任意画一个矩形，再画出它的外接圆.

作业题 ZUOYETI

A

1. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，已知 $\angle A=50°$，$\angle D-\angle B=40°$. 求 $\angle B$，$\angle C$，$\angle D$ 的度数.



（第 2 题）

2. 已知：如图，以等腰三角形 ABC 的底边 BC 为直径的$\odot O$ 分别交两腰 AB，AC 于点 D，E，连结 DE. 求证：$DE/\!/BC$.

3. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\overset{\frown}{ADC}$与$\overset{\frown}{ABC}$的比为 3:2. 求 $\angle B$，$\angle D$ 的度数.

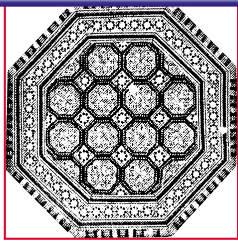
4. 已知四边形 $ABCD$ 的内角 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，$\angle D$ 的度数之比为 3:1:2:5，判断这个四边形是不是圆内接四边形，并说明理由.

B

5. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CD}$，$\overset{\frown}{DA}$的度数之比为 1:2:3:4. 求四边形 $ABCD$ 各内角的度数.

6. 判断命题“圆内接平行四边形一定是矩形”的真假，并给出证明.

3·7 正多边形



这个美丽图案的主体部分由一些多边形构成.你发现这些多边形有什么特别之处吗?

我们把各边相等、各内角也相等的多边形叫做**正多边形**(regular polygon).

根据正多边形的边数的不同,分别把它们叫做正三角形、正方形、正五边形、正六边形等(图 3-49).

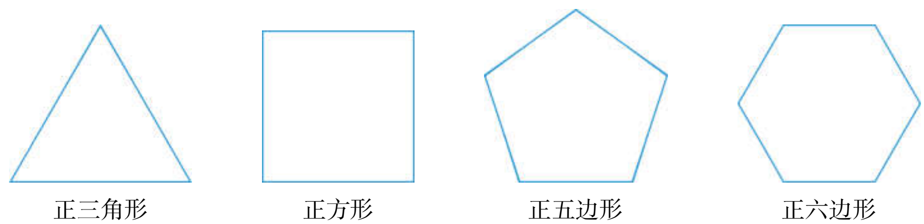


图 3-49

例1 已知一个正多边形的内角为 176.4°,这个正多边形是几边形?有没有内角为 100°的正多边形?

解 设正多边形的边数为 n,由内角为 176.4°,得

$$\frac{(n-2)\times 180}{n}=176.4,$$

解得 $n=100$.

所以内角为 176.4°的正多边形为 100 边形.

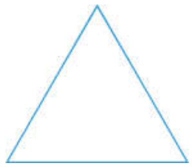
设正 n 边形的内角为 100°,则 $\frac{(n-2)\times 180}{n}=100$,

解得 $n=4.5$.

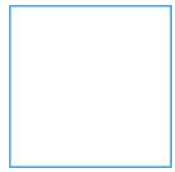
因为 n 应是整数,所以不存在内角为 100°的正多边形.

做一做 ZUOYIZUO

1. 如图,已知正三角形,用直尺和圆规作它的外接圆.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图,已知正方形,用直尺和圆规作它的外接圆.

我们知道,对于任意一个正三角形和正方形都能作出它的外接圆.我们把经过一个正多边形的各个顶点的圆叫做这个正多边形的**外接圆**,这个正多边形也就叫做**圆内接正多边形**.任何正多边形都有一个外接圆.

例2　如图 3-50,已知⊙O,用直尺和圆规作⊙O的内接正六边形.

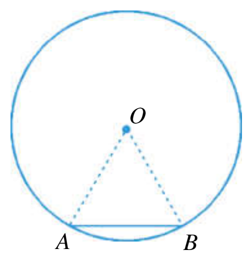


图 3-50

分析　如图 3-50,设 AB 是⊙O 的内接正六边形的一条边,连结 OA,OB,则$\angle AOB=60^\circ$,所以$\triangle AOB$ 为等边三角形,AB 与⊙O 的半径相等.因此,只要以⊙O的半径为半径,从⊙O 上任取一点开始,依次在⊙O 上截取五次,就把⊙O 六等分.也就是说,依次连结这些分点,就得到所要求作的⊙O 的内接正六边形.

作法　如图 3-51.

1. 在⊙O 上任取一点 A.从点 A 开始,以⊙O 的半径为半径,在⊙O 上依次截取点 B,C,D,E,F.

2. 依次连结 AB,BC,CD,DE,EF,FA.

所得的六边形 $ABCDEF$ 就是所求作的⊙O 的内接正六边形.

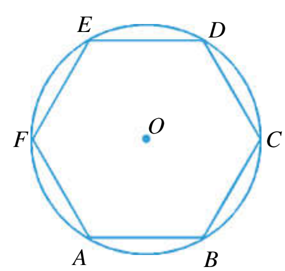


图 3-51

很明显,$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EF}=60^\circ$,

$\therefore\quad \overset{\frown}{FA}=360^\circ-5\times60^\circ=60^\circ=\overset{\frown}{AB}$.

所以点 A,B,C,D,E,F 把⊙O 六等分,即六边形 $ABCDEF$ 是圆内接正六边形.

探究活动 TANJIUHUODONG

我们来探索正多边形的轴对称性和中心对称性.

1. 正三角形和正方形都是轴对称图形吗? 都是中心对称图形吗?

2. 填写下表.

	正五边形	正六边形	正七边形	正八边形
中心对称		✓		
轴对称	✓			
对称轴条数	5			

3. 用命题的形式概括正 n 边形的中心对称性和轴对称性，以及轴对称图形的对称轴的条数.

作业题 ZUOYETI

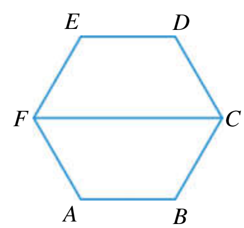
A **1.** 求正七边形的内角的度数.

2. 已知一个正多边形的内角是 140°,它是几边形?

3. 已知正六边形 $ABCDEF$（如图）.

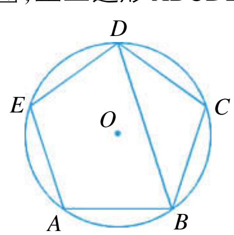
（1）用直尺和圆规作它的外接圆.

（2）求证:CF 是它的外接圆的直径.

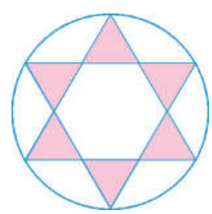


（第 3 题）

B **4.** 如图,正五边形 $ABCDE$ 内接于⊙O,求∠ABD 的度数.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 用直尺和圆规作如图图案(尺寸大小不限).

C **6.** 尺规作图特有的魅力曾使无数人沉湎其中,连当年叱咤风云的拿破仑(1769～1821 年)也不例外.下面一道题传说是拿破仑考他的大臣的,你想试一试吗?

只用圆规把一个圆四等分.

美妙的镶嵌

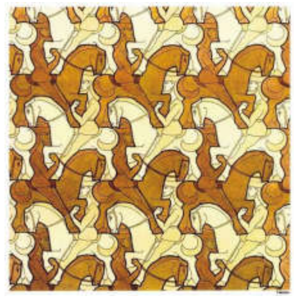


图 3-52

图 3-52 是荷兰著名艺术大师埃舍尔(Escher，1898～1972 年）的一幅作品. 这幅作品由许多全等的“骑士”既不留空隙，又不相重叠地镶嵌而成，妙不可言.联想我们所熟悉的几何图形，如三角形、四边形、各种正多边形等，其中哪些能镶嵌平面呢？很明显，若干全等的四边形能镶嵌平面，如图 3-53.

从图 3-53 我们可以看到，一种多边形能镶嵌平面必须满足这样一个条件：共顶点的各多边形的内角之和等于 360°. 四边形的内角和等于 360°，因此，四边形满足能镶嵌平面的这个必要条件.如果我们用一种正多边形来镶嵌平面，那么这种正多边形的内角度数必须是 360 的因数.所以能单独镶嵌平面的正多边形只有三种，即正三角形、正方形、正六边形.如图 3-54 就是用全等的正六边形镶嵌平面的示意图.

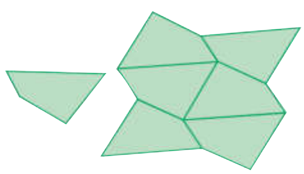


图 3-53

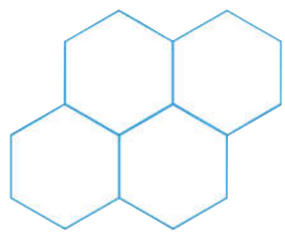


图 3-54

但如果用多种正多边形镶嵌平面，那么能镶嵌平面的正多边形组合就不止上面所说的这几种. 如图 3-55，这些美妙的图案是由多种正多边形镶嵌而成的.

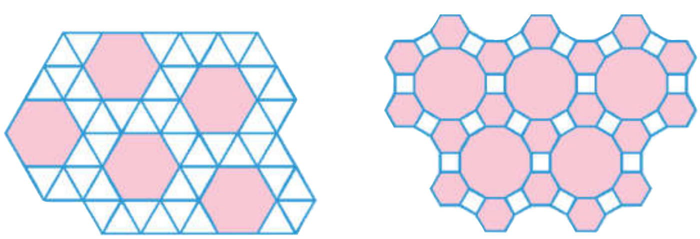


图 3-55

你能用正方形和正八边形两种正多边形设计一幅镶嵌图吗？请试一试.

3·8 弧长及扇形的面积

国家西部大开发的标志性工程——西气东输工程的输送管道西起新疆塔里木，东至上海白鹤镇，全长四千多千米，成为横贯中国的能源传输大动脉. 其中使用了成千上万个圆弧形的弯管，你知道怎样计算这些弯管的长度吗？

我们知道，圆的周长 $l=2\pi R$（R 表示圆的半径）. 那么能否根据圆的周长公式推导出圆的弧长公式呢？

做一做 ZUOYIZUO

1. 已知圆的半径为10 cm，求：

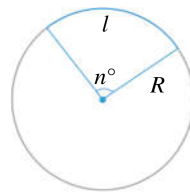
（1）半圆的弧长.

（2）90°圆心角所对的弧长.

（3）1°圆心角所对的弧长.

（4）60°圆心角所对的弧长.

2. 已知圆的半径为 R，求 n°圆心角所对的弧长 l.



（第 2 题）

在半径为R的圆中，n°的圆心角所对的弧长 l 的计算公式为：

$$l=\frac{n\pi R}{180}.$$

例1　如图 3-56，BM 是⊙O 的直径，四边形 $ABMN$ 是矩形，D 是⊙O 上一点，$DC\perp AN$，与 AN 交于点 C. 已知 $AC=15$ mm，⊙O 的半径 $R=30$ mm. 求$\overset{\frown}{BD}$的长.

解　如图 3-57，连结 OD，BD，

则 $OB=OD=30$ mm.

延长 DC，交 OB 于点 E.

在矩形 $ANMB$ 中，$OB\perp AB$，

又 ∵　$CD\perp AN$，

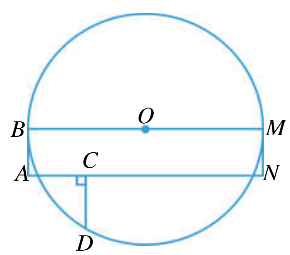


图 3-56

$\therefore\quad DE\perp OB$,

$\therefore\quad$ 四边形 $ACEB$ 是矩形,

$\therefore\quad BE=AC=15$.

$\because\quad OB=30$,

$\therefore\quad OE=BE$,

$\therefore\quad BD=OD$(根据什么?).

$\therefore\quad \triangle OBD$ 是等边三角形,

$\therefore\quad \angle DOB=60°$,

$\therefore\quad \overset{\frown}{BD}=\dfrac{n\pi R}{180}=\dfrac{60\times\pi\times30}{180}=10\pi(\mathrm{mm})$.

答:$\overset{\frown}{BD}$的长为 10π mm.

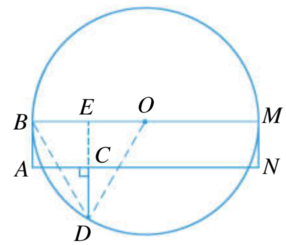


图 3-57

例2 一段圆弧形的公路弯道,圆弧的半径是 2 km.一辆汽车以每小时 60 km 的速度通过弯道,需时 20 s. 求弯道所对圆心角的度数(精确到 0.1°).

分析 如果能求出弯道的弧长,那么由于半径已知,根据弧长公式就可以求出弯道所对圆心角的度数.

解 汽车在 20 s内通过的路程为 $l=\dfrac{60}{3\,600}\times20=\dfrac{1}{3}(\mathrm{km})$,

由弧长公式 $l=\dfrac{n\pi R}{180}$,得圆心角的度数为

$$n=\frac{180l}{\pi R}=\frac{180\times\frac{1}{3}}{\pi\times2}=\frac{30}{\pi}\approx9.5(\text{度}).$$

答:弯道所对圆心角的度数约为 9.5°.

课内练习 KENEILIANXI

1. 直径为 100 cm 的圆弧的度数为 20°30′. 求这条弧的长(结果精确到 0. 1 cm).

2. 已知半径为 5 cm 的圆弧长为 5 cm. 求这条弧所对圆心角的度数(精确到 0.1°).

3. 已知圆弧的度数为 60°,弧长为 6π cm. 求圆的半径.

4. 已知圆弧的长为 10π cm,弧的半径为 20 cm. 求弧的度数.

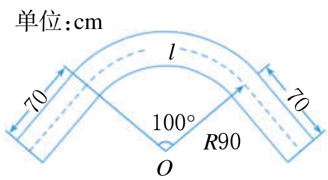
作业题 ZUOYETI

A 1. 已知弧的长为 3π cm，弧的半径为 6 cm. 求弧的度数.

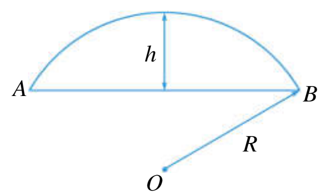
2. 已知圆的半径为 $\frac{17}{2\pi}$ cm，圆心角为 150°. 求这个圆心角所对的弧长.

3. 已知圆的半径为 R. 设弧的度数为 $n°$，当 n 分别为 120，90，60 时，求弦长与弧长的比. 所求的三个比中，哪一个更接近 1？

4. 西气东输工程全长四千多千米，其中有成千上万个圆弧形弯管. 制作弯管时，需要先按中心线计算“展直长度”再下料. 求出图中管道的全长(中心线的长度，精确到 1 cm).



(第 4 题)



(第 5 题)

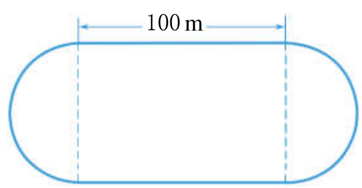
B 5. 如图，弧 AB 的半径 R 为 30 m，弓形的高 h 为 15 m. 求$\overset{\frown}{AB}$的长.

6. 如图，某田径场的最内圈周长为 400 m，其中两个半圆弯道的内圈共长 200 m，每条直道长 100 m，且每条跑道宽 1 m (共 6 条跑道).

(1) 最内圈弯道半径为多少米(精确到 0.1 m)？

(2) 最内圈弯道与最外圈弯道的长相差多少米(精确到 0.1 m)？

(3) 相邻两圈的长度之间有什么规律？



(第 6 题)

2

如图 3-58，$\odot O$ 的半径为 R，$\angle BOC=n^{\circ}$. 怎样求扇形 BOC 的面积？

因为 1°圆心角的扇形的面积为圆面积的 $\frac{1}{360}$，即 $\frac{\pi R^2}{360}$，所以扇形 BOC 的面积为 $\frac{n\pi R^2}{360}$. 由弧长公式 $l=\frac{n\pi R}{180}$，得

$$\frac{n\pi R^2}{360}=\frac{n\pi R\times R}{2\times 180}=\frac{1}{2}lR.$$

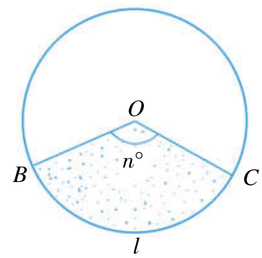


图 3-58

如果扇形的半径为 R，圆心角为 n°，扇形的弧长为 l，那么扇形面积 S 的计算公式为：

$$\boldsymbol{S=\frac{n\pi R^2}{360}=\frac{1}{2}lR.}$$

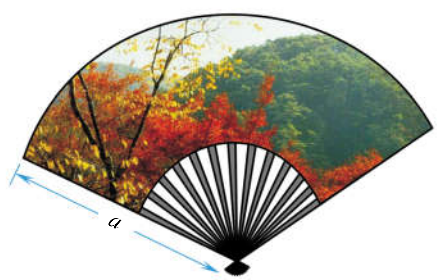
做一做 ZUOYIZUO

已知圆的半径为 6 cm，求下列各扇形的面积.

（1）圆心角为 90°的扇形.　　（2）圆心角为 120°的扇形.

（3）圆心角为 240°的扇形.　　（4）弧长为 7.2 cm 的扇形.

例3　如图 3-59，有一把折扇和一把团扇. 已知折扇的骨柄与团扇的直径一样长，折扇扇面的宽度是骨柄长的一半，折扇张开的角度为 120°，问：哪一把扇子扇面的面积大？



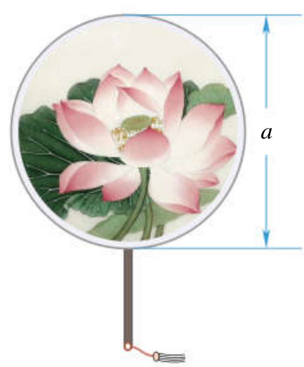


图 3-59

解 设折扇的骨柄长为 a，由于折扇扇面面积为两个扇形面积之差，

$$\therefore \quad S_{折扇}=\frac{120\pi\cdot a^2}{360}-\frac{120\pi}{360}\times\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}a^2.$$

而 $S_{团扇}=\pi\times\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}a^2$，

所以两把扇子扇面的面积一样大.

例4 我国著名的引滦工程的主干线输水管的直径为 2.5 m，设计流量为 12.73 m^3/s. 如果水管截面中水面面积如图 3-60 所示，其中 $\angle AOB=45°$，那么水的流速应达到每秒多少米（精确到 0.01 m/s）？

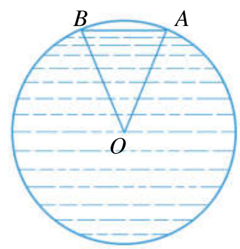


图 3-60

分析 由图 3-60，不难发现截面中有水部分（阴影部分）的面积是圆的面积与空隙部分（弓形）面积之差. 因此根据水的流量、截面中水面面积与流速的关系，即可求得水的流速.

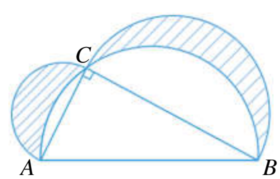
请你自己写出解题过程，并与同伴交流.

课内练习 KENEILIANXI

1. 已知扇形的圆心角为 30°，面积为 $3\pi\ cm^2$. 求扇形的半径.

2. 已知扇形的圆心角为 150°，弧长为 20π cm. 求扇形的面积.

3. 如图，阴影部分表示以直角三角形各边为直径的三个半圆所围成的两个新月形，它的面积与直角三角形的面积有什么关系？请说明理由.



（第 3 题）

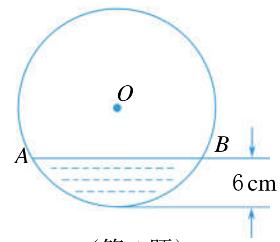
作业题 ZUOYETI

A **1.** 已知圆的半径为 18 cm,扇形的圆心角为 135°. 求扇形的面积.

2. 一扇形的半径等于已知圆的半径的 2 倍,且它的面积等于该已知圆的面积. 求这一扇形的圆心角.

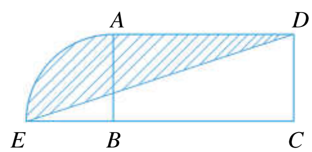
3. 已知一个扇形的面积为 $12\pi\ \mathrm{cm}^2$, 圆心角为 216°. 求它的弧长.

4. 如图,水平放置的圆柱形排水管的截面半径为 12 cm, 截面中有水部分弓形的高为 6 cm. 求截面中有水部分弓形的面积(精确到 1 cm^2).

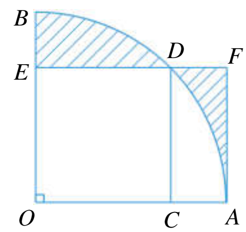


(第 4 题)

B **5.** 如图,在矩形 $ABCD$ 中,$AD=2AB=2$. 以 B 为圆心,BA 为半径作圆弧,交 CB 的延长线于点 E,连结 DE. 求图中阴影部分的面积.



(第 5 题)



(第 6 题)

6. 如图,扇形 AOB 的圆心角为直角,边长为 1 的正方形 $OCDE$ 的顶点 C,E,D 分别在 OA,OB,$\overset{\frown}{AB}$上. 过点 A 作 $AF\perp ED$,交 ED 的延长线于点 F. 求图中阴影部分的面积.

有关正多边形的折纸

只用一张长方形的纸片，能作出一个正方形吗？

例如，把长方形纸按图 3-61 折叠，摊开、铺平后，折痕 $ABCD$ 即构成一个正方形. 通过折痕来构造图形的基本原理是：叠合可以产生全等图形，由此就能得到一些相等的角和相等的边，为所要构造的图形提供合适的条件.

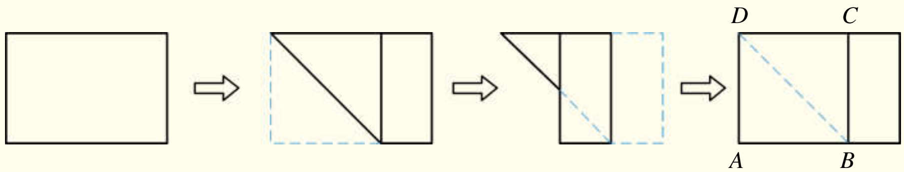


图 3-61

当要折出的图形是正多边形时，如何产生各条相等的边和各个相等内角，是我们寻找折叠方法的主要出发点.

下面我们再看一例：用一张正方形纸折出一个正三角形.

分析：如图 3-62. 如果把正方形纸的一边(AB)作为要折的正三角形的一条边，那么只要通过适当的折叠，使边 AD，BC 成为正三角形的另外两条边. 根据正三角形和正方形的轴对称性，我们可以先对折正方形，得到 AB 的垂直平分线，再摊开、铺平，把点 D，C 折到 AB 的垂直平分线上. 折叠后点 D 与点 C 重合，记为点 O. 很明显，$\triangle ABO$ 是等边三角形. 这样，只要沿 AO，BO 各折一次，两条折痕与边 AB 就构成了一个正三角形. 请动手折一折.

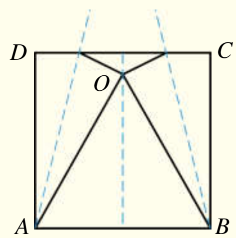


图 3-62

试一试：

（1）用一张正三角形纸折出一个正六边形.

（2）用一张正方形纸折出一个正八边形.

小结

XIAOJIE

填空.

1. 在同一平面内,线段 OP 绕它固定的一个端点 O 旋转一周,__________所经过的封闭曲线叫做圆,定点 O 叫做______,线段 OP 叫做________.

2. 如果 P 是圆所在平面内的一点,d 表示 P 到圆心的距离,r 表示圆的半径,那么就有:$d<r\Leftrightarrow$点 P在圆______;

d____$r\Leftrightarrow$点 P 在圆上;

$d>r\Leftrightarrow$点 P 在圆______.

3. ________________的三个点确定一个圆.

4. 三角形的外心是三角形三条边的________的交点.

5. 由一个图形变为另一个图形,在运动的过程中,原图形上的所有点都绕一个固定的点,按________转动________,这样的图形运动叫做图形的________.

图形经过旋转所得的图形和原图形全等. 对应点到______的距离相等. 任何一对对应点与旋转中心连线所成的角度等于______.

6. 垂径定理:垂直于弦的直径______这条弦,并且平分弦__________.

平分弦(不是直径)的直径________,并且______弦所对的弧.

平分弧的______垂直平分弧所对的弦.

7. 圆心角定理:在同圆或等圆中,相等的圆心角所对的_________相等,所对的_________相等.

在同圆或等圆中,如果__________、__________、________、__________中有一对量相等,那么它们所对应的其余各对量都相等.

8. 圆周角定理:圆周角的度数等于它所对弧上的________的一半.

半圆(或直径)所对的圆周角是____;$90°$的圆周角所对的弦是________.

在同圆或等圆中,同弧或等弧所对的圆周角相等;______的圆周角所对的弧也相等.

9. 圆内接四边形的对角_______.

10. ________相等、各________也相等的多边形叫做正多边形. 任何正多边形都有一个________圆.

11. 在半径为 R 的圆中,$n°$的圆心角所对的弧长的计算公式为:$l=$________.

如果扇形的半径为 R,圆心角为 $n°$,扇形的弧长为 l,那么扇形面积的计算公式为:

$S_{扇形}=$__________$=$___________.

填表.

技能内容	学会程度		
	学 会	基本学会	不 会
过不在同一直线上的三点作圆			
计算弧长和扇形的面积			
利用圆的有关性质,进行简单的论证和计算			

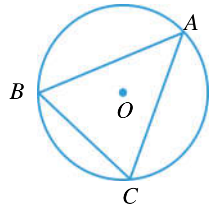
目标与评定

MUBIAOYUPINGDING

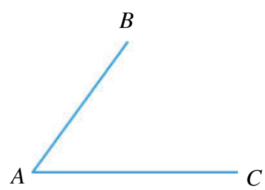
目标A 3.1 节

- 理解圆及其有关概念，探索并了解点与圆的位置关系.
- 理解不在同一条直线上的三个点确定一个圆，了解三角形的外心.
- 会过不在同一直线上的三点作圆.

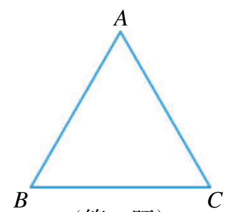
1. 如图，A，B，C 是⊙O 上的三点. 写出图中的三条弦和每一条弦所对的弧.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

2. 如图，AB，AC 为⊙O 的两条弦. 作⊙O，并在⊙O 上找一点 D，使它到 A，B 两点的距离相等.

3. 已知等边三角形 ABC（如图）.

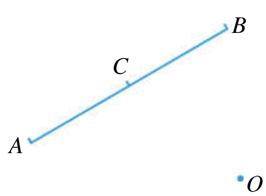
（1）用直尺和圆规作△ABC 的外接圆.

（2）若 $AB=4\sqrt{3}$ cm，求△ABC 的外接圆半径.

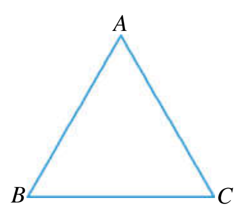
目标B 3.2 节

- 认识图形的旋转.
- 理解图形的旋转的性质，会按要求作出简单平面图形经过旋转所得的图形.

4. 如图，C 为线段 AB 的中点，以点 O 为旋转中心，将线段 AB 按顺时针方向旋转 180°. 作出经旋转后的图形，并标出点 C 的对应点.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 已知等边三角形 ABC（如图）.

（1）以点 A 为旋转中心，将△ABC 按逆时针方向旋转 30°，作出旋转后的图形.

（2）经第（1）题旋转所得的图形与△ABC 之间有没有互相垂直的边？证明你的判断.

目标C 3.3 节 3.4 节 3.5 节

●探索圆的性质，包括圆的轴对称性、中心对称性，以及圆绕圆心旋转的特有性质.

选学 **●探索并证明垂径定理.**

●探索圆心角定理、圆周角定理，包括它们的逆定理和推论.

6. 已知 A,B,C 为⊙O 上顺次三点，且$\angle AOC=150°$. 求$\angle ABC$ 的度数.

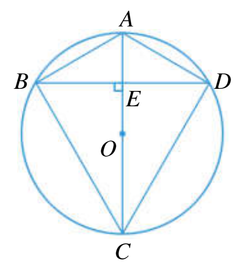
7. 已知⊙O 的直径 AB 为 6 cm，弦 AC 与 AB 的交角为 30°. 求弦 BC 的长及弦 AC 的弦心距.

8. 如图，AC 是⊙O 的直径，弦 BD 垂直平分 AO，E 为垂足.

（1）求四边形 $ABCD$ 的各个内角的度数.

（2）找出图中度数为 30°的所有的角.

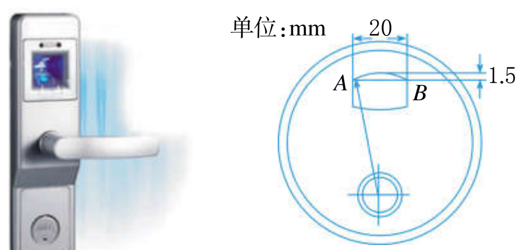
（3）若 $BD=2$ cm，求弓形 BAD 的高 AE.



（第 8 题）

9. 已知半径为 10 的⊙O 中，AB，CD 是⊙O 的两条平行的弦. 若 $AB=8$，$CD=10$，求 AB，CD 之间的距离.

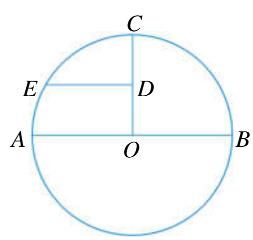
10. 如图为一个门锁的部分设计图，求$\overset{\frown}{AB}$所在圆的半径（精确到 0.1 mm）.



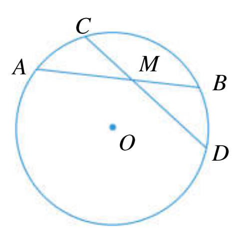
（第 10 题）

11. 已知：如图，AB 是⊙O 的直径，$OC\perp AB$，D 是 CO 的中点，$DE/\!/AB$.

求证：$\overset{\frown}{EC}=2\overset{\frown}{EA}$.



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 已知：如图，在⊙O 中，$AB=CD$，AB 与 CD 相交于点 M.

求证：$AM=DM$.

目标D
3.6节 3.7节

● 了解圆内接四边形和四边形的外接圆的定义.

● 掌握圆内接四边形的对角互补.

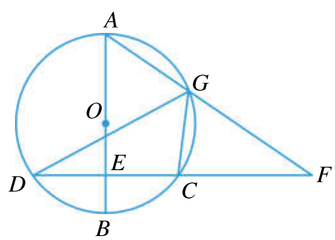
● 了解正多边形的概念及正多边形与圆的关系.

● 会用直尺和圆规作圆的内接正方形和正六边形.

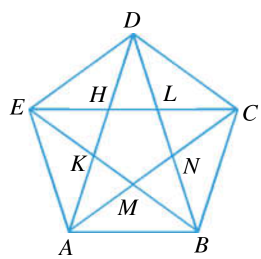
13. 已知四边形 $ABCD$ 内接于$\odot O$，$\overset{\frown}{AD}=72^\circ$，$\overset{\frown}{CD}=80^\circ$，$\overset{\frown}{AB}=100^\circ$. 求四边形 $ABCD$ 各个内角的度数.

14. 求正十五边形的内角度数.

15. 已知：如图，AB 是$\odot O$ 的直径，弦 $CD\perp AB$ 于点 E，G 是$\overset{\frown}{AC}$上一点，AG，DC 的延长线交于点 F. 求证：$\angle FGC=\angle AGD$.



（第 15 题）



（第 16 题）

16. 已知：如图，连结正五边形 $ABCDE$ 各条对角线，就得到一个五角星图案.

（1） 求五角星的各个顶角(如$\angle ADB$)的度数.

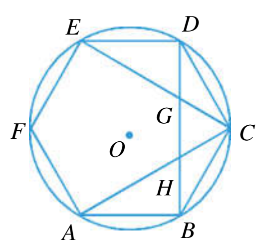
（2） 求证：五边形 $MNLHK$ 是正五边形.

17. 利用圆的等分作图：

（1） 用直尺和圆规作一个正六边形.

（2） 发挥你的创造性和想象力，设计一幅美丽的图案.

18. 已知：如图，在圆内接正六边形 $ABCDEF$ 中，AC，EC 分别交 BD 于点 H，G. 求证：点 H，G 三等分 BD.



（第 18 题）

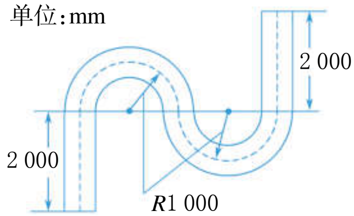
目标E
3.8节

● 会计算圆的弧长和扇形的面积.

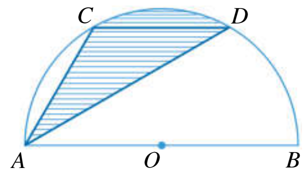
19. 已知圆心角为 120°的扇形的面积为 12π，则扇形的弧长为(　　)

（A） 4.　　（B） 2.　　（C） 4π.　　（D） 2π.

20. 如图，已知中心线的两个半圆弧半径都为 1 000 mm，两直管道的长度都为 2 000 mm. 求图中管道的展直长度(即图中虚线所表示的中心线的长度，精确到 1 mm).



(第 20 题)



(第 21 题)

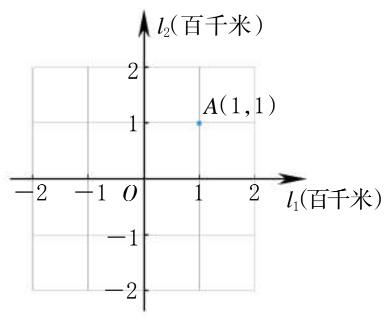
21. 如图，C，D 是以 AB 为直径的半圆周的三等分点，$CD=8$ cm. 求阴影部分的面积.

目标F

●会初步综合应用圆的有关知识，解决一些简单的实际问题.

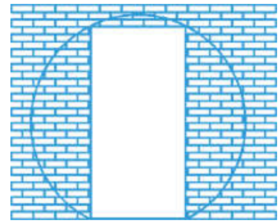
22. 如图，以两条互相垂直的交通主干线 l_1，l_2 为坐标轴，建立直角坐标系. 在一次地震应急模拟中，预测震中将位于点 $A(1,1)$处，地震影响范围的半径为 200 千米. 根据该模拟预测，问：这两条交通线上的下列城市会受到地震的影响吗？请说明理由.

$B(2,0)$，$C(2.9,0)$，$D(-0.5,0)$，$E(0,-1)$，$F(0,2.7)$，$G(0,-0.7)$.



(第 22 题)

23. 一面墙上有一个矩形的门洞，现要将它改为一个圆弧形的门洞，圆弧所在的圆外接于矩形，如图. 已知矩形的高为 2 m，宽为 $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ m. 求要打掉墙体的面积(结果精确到 0.01 m^2).



(第 23 题)

第 4 章

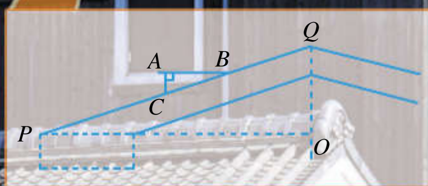
相似三角形

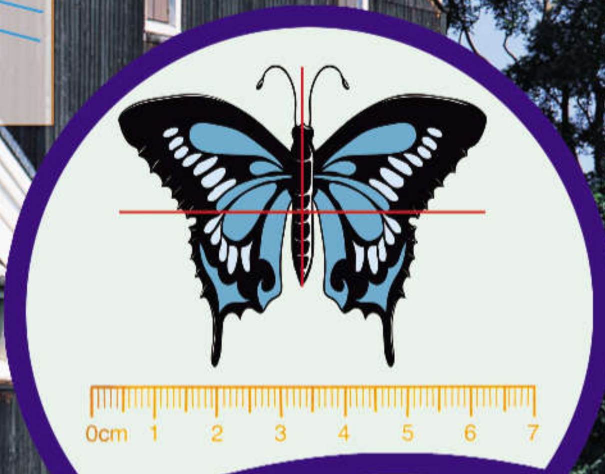
目录 CONTENTS<<

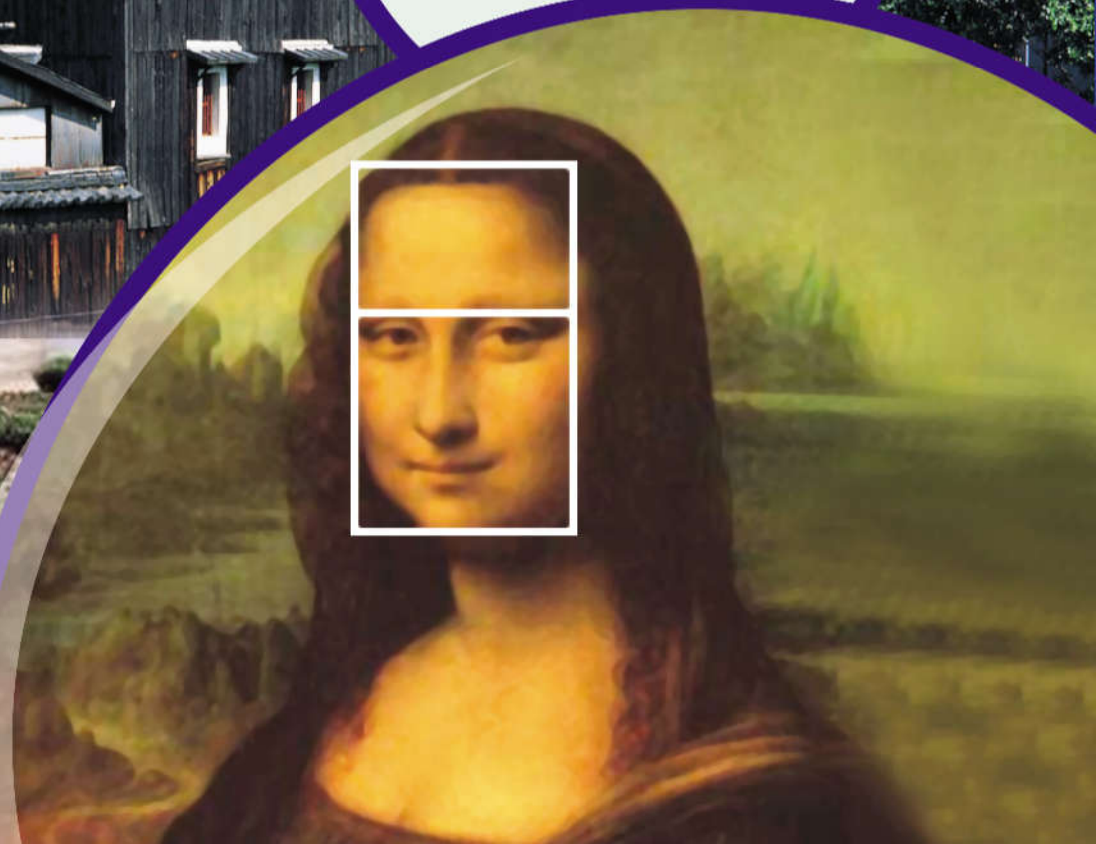
黄金分割被称为是“最美丽”的几何比率，应用于建筑、绘画、雕刻等各个领域. 自然界中也有很多例子，如蝴蝶身长与双翅展开后的长度之比约为0.618. 那么黄金分割究竟是怎样一种分割？黄金比又是怎样计算的呢？

屋架跨度的一半OP 长为5米，高度OQ为2.25米. 现要在屋顶上开一个天窗，其高度AC为1.2米，AB在水平位置. 你能求出AB的长度吗？

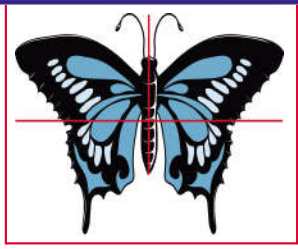
本章我们将学习比例线段，相似三角形，相似多边形和图形的位似. 通过本章的学习，我们就能解决上述问题.







4·1 比例线段



美丽的蝴蝶身长与双翅展开后的长度之比约为 0.618. 许多美的图案都与 0.618 这个比值有关. 你知道 0.618 这个比值的来历吗?

我们知道,如果两个数的比值与另两个数的比值相等,就说这四个数成比例. 通常我们把 a,b,c,d 四个实数成比例表示成 $a:b=c:d$,或 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$,其中 b,c 称为内项,a,d 称为外项.

做一做 ZUOYIZUO

1. 分别计算下列比例式的两个内项的积与两个外项的积.

(1) $\dfrac{0.3}{2}=\dfrac{0.6}{4}$.　　(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

2. 利用等式的性质,能从 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ 推导出 $ad=bc$ 吗? 反过来呢?

比例有如下基本性质:

$\boldsymbol{\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc}$ (a,b,c,d 都不为 0[1]).

例1 根据下列条件,求 $a:b$ 的值.

(1) $2a=3b$.　　(2) $\dfrac{a}{5}=\dfrac{b}{4}$.

解 (1) $2a=3b\Rightarrow a:b=3:2$,即 $a:b=\dfrac{3}{2}$.

(2) $\dfrac{a}{5}=\dfrac{b}{4}\Rightarrow 4a=5b\Rightarrow \dfrac{a}{b}=\dfrac{5}{4}$.

[1] 本套教科书中比例式的字母都约定取值不为 0.

例2 已知$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,判断下列比例式是否成立,并说明理由.

(1) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.　　(2) $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$ $(b+d\neq 0)$.

解 (1) 比例式成立.理由如下:

$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

两边同加上1,得 $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$,即$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

(2) 比例式成立.理由如下:

设$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$,则$a=bk$,$c=dk$.

$\because b+d\neq 0$,

$\therefore \frac{a+c}{b+d}=\frac{bk+dk}{b+d}=k$,

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$.

课内练习 KENEILIANXI

1. 求下列比例式中的 x.

(1) $4:3=5:x$.　　(2) $\frac{x}{3}=\frac{x-1}{2}$.

2. 已知$\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$,求$\frac{a+b}{b}$的值.

3. 已知 $ab=cd$,写出有关 a,b,c,d 成立的比例式(至少写出 4 个).

作业题 ZUOYETI

A **1.** 下列各组数能否成比例? 如果能成比例,请写出一个比例式.

(1) $3,-9,-2,6$.

(2) $\sqrt{12},\sqrt{6},\sqrt{10},\sqrt{5}$.

(3) $3,\sqrt{3},\sqrt{2},2$.

2. 求下列各式中的 x.

（1）$3:x=6:12$.　　　　（2）$\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x-2}{x+1}$.

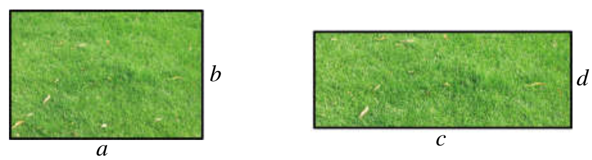
3. 根据下列条件，求 x 与 y 的比.

（1）$\dfrac{2x}{3}=\dfrac{3y}{2}$.　　　　（2）$\dfrac{x-2y}{y}=\dfrac{2}{5}$.

4. 已知 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{2}$，求下列算式的值.

（1）$\dfrac{a-b}{b}$.　　　　（2）$\dfrac{2a-b}{a+2b}$.

B 5. 如图，两块矩形绿地的一组邻边的长分别为 a，b 和 c，d. 已知这两块绿地的面积相等，写出关于 a，b，c，d 的一个比例式.



（第 5 题）

6. 已知 $a:b=c:d$，且 $b\neq d$. 判断下列比例式是否成立，并说明理由.

（1）$a:c=b:d$.　　　　（2）$\dfrac{a}{b}=\dfrac{a-c}{b-d}$.

2

两条线段的长度的比叫做这**两条线段的比**. 如图4-1，线段$OC=2$，$OC'=4$，线段OC与OC'的比是$2:4=\dfrac{1}{2}$，记做$\dfrac{OC}{OC'}=\dfrac{1}{2}$；线段$AB=\sqrt{2}$，$A'B'=2\sqrt{2}$，线段$AB$与$A'B'$的比是$\sqrt{2}:2\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}$，记做$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{1}{2}$.

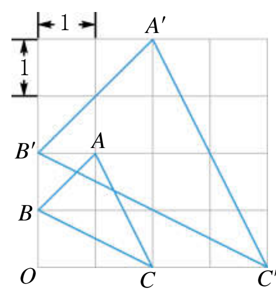


图 4-1

由图4-1我们还可以看到，线段OC与OC'的比和线段AB与$A'B'$的比相等，也就是$\dfrac{OC}{OC'}=\dfrac{AB}{A'B'}$.

一般地，四条线段 a,b,c,d 中，如果 a 与 b 的比等于 c 与 d 的比，即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么这四条线段 a,b,c,d 叫做**成比例线段**，简称**比例线段**(proportional segments). 例如，在图 4-1 中，$OC, OC', AB, A'B'$ 是比例线段.

注意

求两条线段的比必须选定同一长度单位，但比值与单位的大小无关.

做一做 ZUOYIZUO

找出图 4-1 中三组比例线段，并分别写出比例式.

例3 如图 4-2，在 Rt△ABC 中，CD 是斜边 AB 上的高线. 找出一组比例线段，并说明理由.

分析 根据 $ad=bc \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，问题可转化为找出四条线段，使其中两条线段的乘积等于另两条线段的乘积.

解 记 Rt△ABC 的面积为 S，则

$AC \cdot BC=2S, CD \cdot AB=2S$,

$\therefore \quad AC \cdot BC=CD \cdot AB$,

$\therefore \quad \frac{AC}{CD}=\frac{AB}{BC}$,

$\therefore \quad AC, CD, AB, BC$ 是一组比例线段.

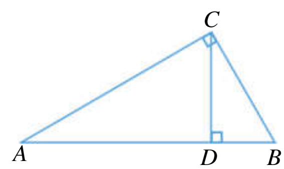


图 4-2

例4 图 4-3 表示我国台湾省几个城市的位置关系. 问：基隆市在高雄市的哪一个方向？到高雄市的实际距离是多少千米？

解 如图 4-3，量出高雄市到基隆市的图上距离约 35 mm.

设实际距离为 s，则 $\frac{35}{s}=\frac{1}{9\ 000\ 000}$,

$\therefore \quad s=35\times 9\ 000\ 000=315\ 000\ 000(\mathrm{mm})$,

即 $\quad s=315(\mathrm{km})$.

量得图中 $\angle\alpha=28°$.

答：基隆市在高雄市的北偏东 28°方向，到高雄市的实际距离约为 315 km.

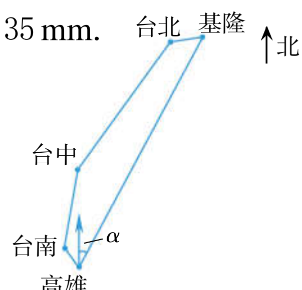
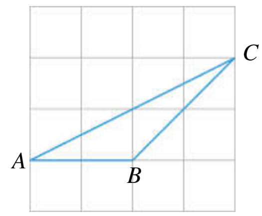


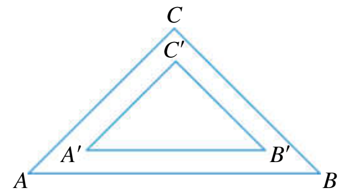
图 4-3

课内练习 KENEILIANXI

1. 如图，$\dfrac{BC}{AB}=$______，$\dfrac{BC}{AC}=$______.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图是一块含 45°角的三角尺.

（1）求图中 AB，BC，CA 三条边的长度之比.

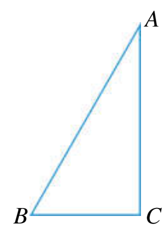
（2）判断线段 AB，AC，$A'B'$，$A'C'$是否成比例，并说明理由.

作业题 ZUOYETI

A

1. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=$Rt∠，$\angle A=30°$. 求：

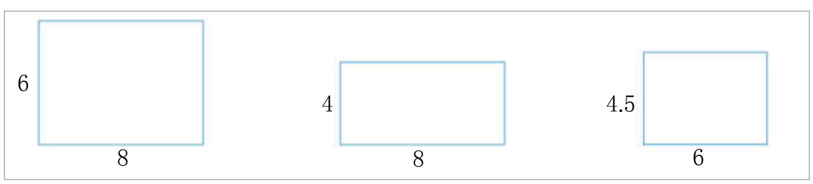
（1）$\dfrac{BC}{AB}$.　　（2）$\dfrac{AC}{AB}$.



（第 1 题）

2. 根据图 4-3，求台中在台北的什么方向，到台北的实际距离是多少千米.

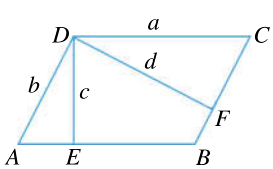
3. 在如图三个长方形中，哪两个长方形的长和宽是比例线段？



（第 3 题）

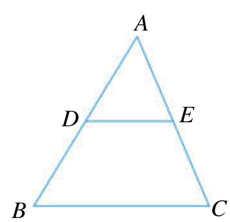
B

4. 如图，在▱$ABCD$ 中，$DE\perp AB$，$DF\perp BC$. 找出图中的一组比例线段（小写字母表示相应线段），并说明理由.



（第 4 题）

5. 如图，DE 是△ABC 的中位线. 请尽可能多地写出比例线段. 对每一组比例线段，写出一个比例式（至少要写出两组）.



（第 5 题）

已知$a=2\sqrt{2}$，$b=2\sqrt{3}$，$c=\sqrt{18}$，算一算，$b^2=ac$ 成立吗？a,b,b,c 这四个数是否成比例？再写出三个数，使它们满足$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$的条件.

（请与你的同伴交流）

一般地，如果三个数a,b,c 满足比例式$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$（或 $a:b=b:c$），那么 b 就叫做a,c的**比例中项**.

$$b^2=ac\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{b}{c}.$$

做一做 ZUOYIZUO

1. 1 是不是$1\frac{1}{2}$和$\frac{2}{3}$的比例中项？如果是比例中项，请写出相应的比例式.

2. 已知线段 $a=3$，$b=27$，求 a,b 的比例中项线段.

图 4-4 是意大利著名画家达·芬奇（da Vinci，1452～1519 年）的名画《蒙娜丽莎》. 画面中脸部被围在矩形 $ABCD$ 内，图中四边形 $BCEF$ 为正方形. 量一量点 F 到点 A,B 的距离. $\frac{FA}{BF}$与$\frac{BF}{AB}$相等吗？

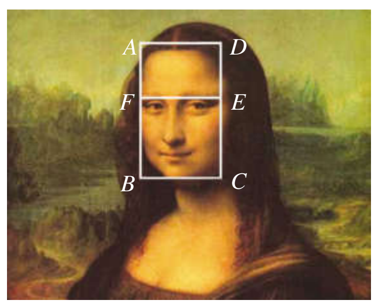


图 4-4

图 4-5

如图 4-5，如果点 P 把线段 AB 分成两条线段 AP 和 PB，使 $AP>PB$，且$\frac{PB}{AP}=\frac{AP}{AB}$，那么称线段 AB 被点 P **黄金分割**（golden section），点 P 叫做线段 AB 的黄金分割点，所分成的较长一条线段 AP 与整条线段 AB 的比叫做**黄金比**（golden ratio）. 例如，图 4-4 中，$\frac{AF}{BF}=\frac{BF}{AB}$，它们都是黄金比，又因为 $BC=BF$，所以矩形 $ABCD$ 的宽与长之比也是黄金比.

应用一元二次方程的知识，可以求出黄金比的数值.

如图 4-5，设$\dfrac{AP}{AB}=x$，则 $PB=AB-AP=AB-AB\cdot x$.

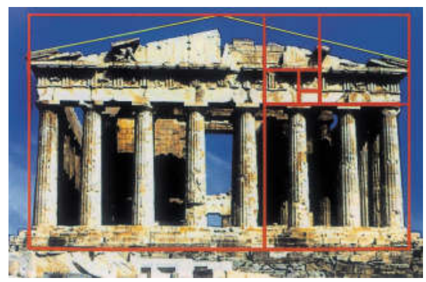
由$\dfrac{PB}{AP}=\dfrac{AP}{AB}$，得$\dfrac{AB-AB\cdot x}{AB\cdot x}=\dfrac{AB\cdot x}{AB}$，即$\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{x}{1}$.

化简，得 $x^2+x-1=0$.

解得 $x_1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，$x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$（不合题意，舍去）.

所以$\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$.

历史上，人们视黄金分割为“最美丽”的几何比率，广泛应用于建筑和图案设计等方面. 图 4-6 中所示的框住古希腊神庙图形的长方形，它的宽与长之比就等于黄金比. 有趣的是，在自然界中也有很多黄金分割的例子，例如，蝴蝶的身长与双翅展开后的长度之比接近黄金比的近似值 0.618.



古代希腊的帕特农神庙

图 4-6

例5 如图 4-7，已知线段 $AB=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，点 P 是它的黄金分割点，$AP>PB$. 求 AP，BP 的长.

解 因为点 P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AP>PB$，

图 4-7

$\therefore \quad \dfrac{AP}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，

$\therefore \quad AP=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}AB=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\times\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=1$，

$BP=AB-AP=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}-1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

课内练习 KENEILIANXI

1. 求下列各组线段 a,b 的比例中项线段.

(1) $a=\sqrt{3}$,$b=3\sqrt{3}$.

(2) $a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$,$b=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

2. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点,$AP>PB$,求:

(1) $\dfrac{AP}{PB}$(精确到 0.1).

(2) 若 $AB=2$,求 PB.

(第 2 题)

作业题 ZUOYETI

A **1.** 求线段 a,b 的比例中项线段.

(1) $a=4.5$,$b=2$.

(2) $a=\sqrt{2}-1$,$b=\sqrt{2}+1$.

2. 如图,C是线段 AB 的黄金分割点,$AC>BC$. 写出黄金分割的比例式,指出其中的比例中项.

(第 2 题)

3. 一本书的宽与长之比为黄金比. 已知它的宽为 14 cm,求它的长(精确到 0.1 cm).


(第 3 题)

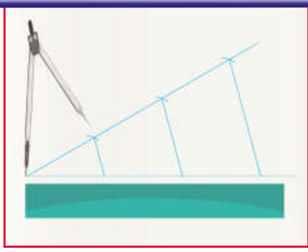
B **4.** 有些植物茎上相邻两片叶子成 $137°28'$ 的角,这种角度使植物通风和采光的效果最佳. 这一度数与怎样的角的度数成黄金比?


(第 4 题)

C **5.** $1:\sqrt{2}$ 也是一个很有趣的比. 已知线段 AB(如图),用直尺和圆规作 AB 上的一点 P,使 $AP:AB=1:\sqrt{2}$.

(第 5 题)

4·2 由平行线截得的比例线段



你能用直尺和圆规把一条线段三等分吗?

合作学习
HEZUOXUEXI

1. 观察有横格线的练习簿页(图 4-8),这些横格线有什么特征? 在图 4-8 中任意画几条直线,使之与横格线相交. 这些横格线在每一条所画的直线上截得的线段有什么规律?

图 4-8

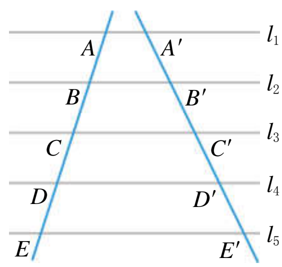


图 4-9

2. 观察图 4-9. l_1,l_2,l_3,l_4,l_5 是一组等距离的平行线. AE 与 $A'E'$ 是任意画的两条直线,分别与这组平行线依次相交于点 A,B,C,D,E 和 A',B',C',D',E'. 比例式 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{A'B'}{B'C'}$ 成立吗? $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{A'B'}{B'D'}$ 呢? $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BD}{B'D'}$ 呢? 为什么? 你还能再找出两组比例线段吗?

我们有以下的基本事实:

两条直线被一组平行线(不少于 3 条)**所截,所得的对应线段成比例**.

例1 如图 4-10，直线 $l_1 // l_2 // l_3$，直线 AC 分别交 l_1, l_2, l_3 于点 A, B, C；直线 DF 分别交 l_1, l_2, l_3 于点 D, E, F. 已知 $DE=3, EF=6, AB=4$，求 AC 的长.

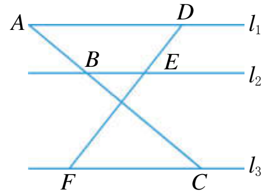


图 4-10

解 $\because$ $l_1 // l_2 // l_3$，

$\therefore$ $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{DF}{DE}$（两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例），

$\therefore$ $\dfrac{AC}{4}=\dfrac{3+6}{3}$，

解得 $AC=12$.

例2 已知线段 AB（图 4-11）. 把线段 AB 五等分.

作法 如图 4-11.

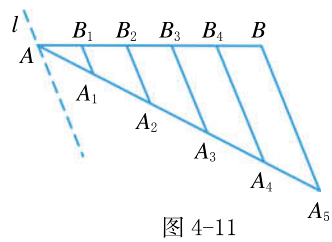


图 4-11

1. 以 A 为端点作一条射线，并在射线上依次截取线段 $AA_1=A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=A_4A_5$.

2. 连结 A_5B，并过点 A_1, A_2, A_3, A_4 分别作 A_5B 的平行线，依次交 AB 于点 B_1, B_2, B_3, B_4.

点 B_1, B_2, B_3, B_4 就是所求作的把线段 AB 五等分的点.

事实上，我们只要过点 A 作一条与 A_5B 平行的直线 l（图 4-11），就可以根据“两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例”的基本事实，得到：

$$\frac{AB_1}{AA_1}=\frac{B_1B_2}{A_1A_2}=\frac{B_2B_3}{A_2A_3}=\frac{B_3B_4}{A_3A_4}=\frac{B_4B}{A_4A_5}.$$

而 $AA_1=A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=A_4A_5$，

$\therefore$ $AB_1=B_1B_2=B_2B_3=B_3B_4=B_4B$，

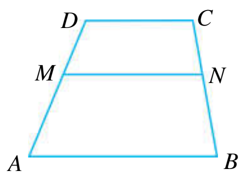
这就证明了点 B_1, B_2, B_3, B_4 是所求作的五等分的分点.

想一想

把线段 AB 分成 AC, CB 两条线段，并使 $AC : CB=2:3$，可怎么作？

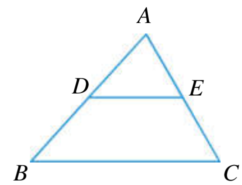
课内练习 KENEILIANXI

1. 如图，$AB // CD // MN$，点 M，N 分别在线段AD，BC 上. 写出成比例线段和相应的比例式.



（第 1 题）

（第 2 题）



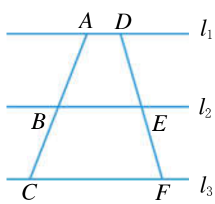
（第 3 题）

2. 已知线段 a（如图），把它六等分.

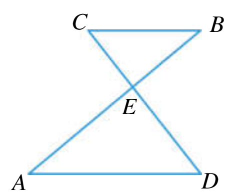
3. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$DE // BC$，$AD=EC$，$BD=4$，$AE=3$. 求 AB 的长.

作业题 ZUOYETI

A 1. 如图，直线 $l_1 // l_2 // l_3$，直线 AC 交 l_1，l_2，l_3 于点 A，B，C；直线 DF 交 l_1，l_2，l_3 于点 D，E，F. 已知$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{4}{3}$，求$\dfrac{DE}{DF}$.



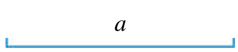
（第 1 题）



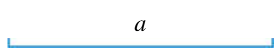
（第 2 题）

2. 如图，AB 与 CD 相交于点 E，$AD // BC$，$\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{3}{4}$，$CE=2$. 求 CD 的长.

3. 把已知线段 a（如图）三等分.



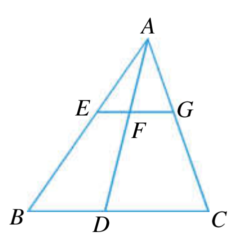
（第 3 题）



（第 4 题）

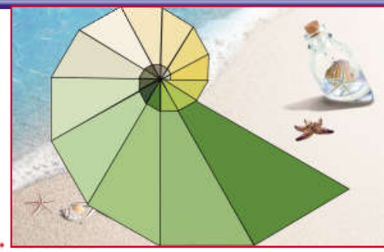
B 4. 已知线段 a（如图），把它分成 $3:4$ 的两条线段.

5. 已知：如图，在$\triangle ABC$ 中，D 为 BC 上一点，$EG // BC$，分别交 AB，AD，AC 于点 E，F，G. 求证：$AE:AF:AG=BE:DF:CG$.



（第 5 题）

4·3 相似三角形



有些奇妙的曲线与相似三角形有着密切的联系.

合作学习 HEZUOXUEXI

量一量图 4-12 中 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 各内角的度数,这两个三角形各内角之间有什么关系?再算一算 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 各条边的长,这两个三角形的边之间有什么关系?

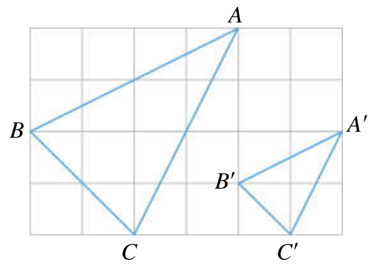


图 4-12

一般地,对应角相等,对应边成比例的两个三角形,叫做**相似三角形**(similar triangle).相似三角形对应边的比叫做**相似比**(similarity ratio).

相似用符号“ ∽ ”表示,读做“相似于”.如图 4-12,$\angle A'=\angle A$,$\angle B'=\angle B$,$\angle C'=\angle C$,$\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{A'C'}{AC}$,所以 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 相似,记做“$\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$”❶. $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比是 $\dfrac{A'B'}{AB}$(或 $\dfrac{B'C'}{BC}$,$\dfrac{A'C'}{AC}$).

根据相似三角形的定义,可得到下面的性质:

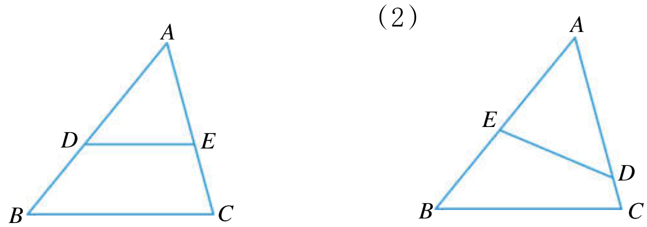
相似三角形的对应角相等,对应边成比例.

❶ 在本套教材中,当用符号“∽”表示两个三角形相似时都把对应顶点字母写在对应位置上.

做一做 ZUOYIZUO

1. 如图，D，E 分别是 $\triangle ABC$ 的两条边上的点，$\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似. 根据以下两个不同的图形，分别写出 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的对应角，以及对应边成比例的比例式.

（1）　　　　　　　　（2）



（第 1 题）

2. 两个全等三角形是不是相似三角形？如果是，那么它们的相似比是多少？

例1　已知：如图 4-13，D，E 分别是 AB，AC 边的中点.

求证：$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

证明　$\because$　D，E 分别是 AB，AC 的中点，

$\therefore$　$DE /\!/ BC$，$DE=\dfrac{1}{2}BC$.

$\therefore$　$\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$.

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 中，

$$\left.\begin{array}{l}\angle ADE=\angle B,\ \angle AED=\angle C,\ \angle A=\angle A\\ \dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \triangle ADE \backsim \triangle ABC$（相似三角形的定义）.

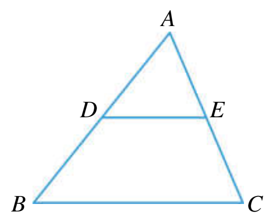


图 4-13

例2　如图 4-14，D，E 分别是 $\triangle ABC$ 的 AB，AC 边上的点，$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$. 已知 $AD:DB=1:2$，$BC=9\,\text{cm}$，求 DE 的长.

解　$\because$　$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$，

$\therefore$　$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}$（相似三角形的对应边成比例）.

$\because \dfrac{AD}{DB}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{1}{3}$,

$\therefore \dfrac{DE}{BC}=\dfrac{1}{3}$,即$\dfrac{DE}{9}=\dfrac{1}{3}$,

$\therefore DE=\dfrac{1\times 9}{3}=3(\text{cm})$.

答:DE 的长为 3 cm.

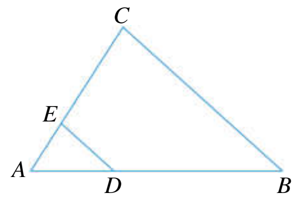


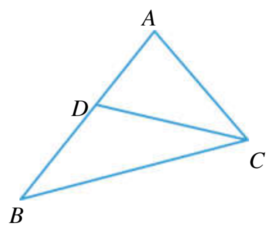
图 4-14

课内练习 KENEILIANXI

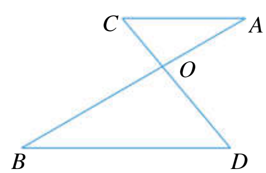
1. 如图,D 是 AB 上的一点,$\triangle ABC \backsim \triangle ACD$,且 $AD:AC=2:3$,$\angle ADC=65°$,$\angle B=37°$.

(1) 求$\angle ACB$,$\angle ACD$ 的度数.

(2) 写出$\triangle ABC$ 与$\triangle ACD$ 的对应边成比例的比例式,并说出相似比.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图,AB,CD 相交于点 O,$\triangle AOC \backsim \triangle BOD$.

(1) 若 $OC:OD=1:2$,$AC=5$,求 BD 的长.

(2) 若$\angle A=35°$,$\angle AOC=100°$,求$\angle D$ 的度数.

3. 如果两个三角形都与第三个三角形相似,那么这两个三角形相似吗?为什么?

作业题 ZUOYETI

A **1.** 已知$\triangle ABC \backsim \triangle PQR$,且$\triangle ABC$ 与$\triangle PQR$ 的相似比是$\dfrac{2}{5}$,则

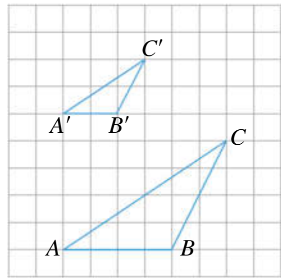
$\dfrac{AB}{PQ}=$________,$\dfrac{QR}{BC}=$________.

2. 如图，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是相似三角形.

（1）用符号表示图中两个相似三角形.

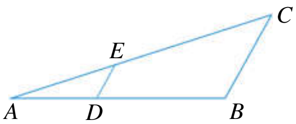
（2）写出各对对应角.

（3）写出对应边成比例的比例式，并求出 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的相似比.



（第 2 题）

3. 如图，D，E 分别是 AB，AC 上的点，$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$，相似比是 $\frac{2}{5}$.



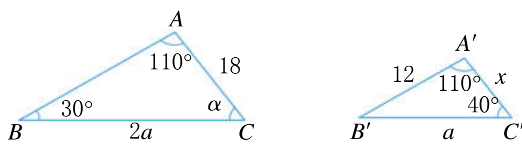
（第 3 题）

（1）若 $DE=4\,\text{cm}$，求 BC 的长.

（2）若 $AE=7\,\text{cm}$，求 EC 的长.

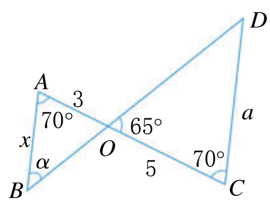
4. 在下面两组图形中，每组的两个三角形相似，a 表示已知数. 试分别确定 α，x 的值.

（1）



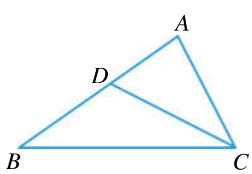
（第 4(1)题）

（2）

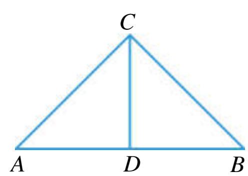


（第 4(2)题）

B **5.** 如图，$\triangle ABC \backsim \triangle ACD$，点 D 在 AB 上. 已知 $AC=3\,\text{cm}$，$AD=2\,\text{cm}$. 求 AB 的长.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 已知：如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=\text{Rt}\angle$，$AC=BC$，$CD\perp AB$ 于点 D. 求证：$\triangle ACD \backsim \triangle ABC$.

4·4 两个三角形相似的判定

怎样运用三角形的相似测量河的宽度？

1

合作学习 HEZUOXUEXI

1. 如图 4-15，在$\triangle ABC$中，D，E分别是AB，AC上的点，$DE /\!/ BC$. $\triangle ADE$与$\triangle ABC$相似吗？

2. 回顾判定两个三角形全等的条件，相应的，猜想判定两个三角形相似有哪些条件？

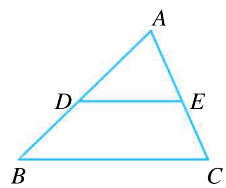


图 4-15

判定三角形相似的预备定理：

选学 **平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似.**

根据上述预备定理，我们可以得到以下三角形相似的判定定理：

有两个角对应相等的两个三角形相似.

下面给出证明.

已知：如图 4-16，在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$.

求证：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

证明　如图 4-16，在$A'B'$上截取$A'D=AB$，作$DE /\!/ B'C'$，交$A'C'$于点E，则$\triangle A'DE \backsim \triangle A'B'C'$（平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似）.

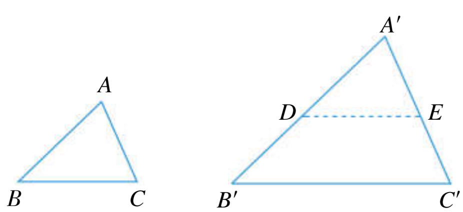


图 4-16

又 ∵ $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'=\angle A'DE$，

∴ $\triangle ABC \cong \triangle A'DE$，

∴ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

例1 在一次数学活动课上，为了测量河宽 AB，小聪采用如下方法（图 4-17）：从 A 处沿与 AB 垂直的直线方向走 45 m 到达 C 处，插一根标杆，然后沿同方向继续走 15 m 到达 D 处，再右转 90°走到 E 处，使 B,C,E 三点恰好在一条直线上. 量得 $DE=20$ m，这样就可以求出河宽 AB. 请你说明理由，并算出结果.

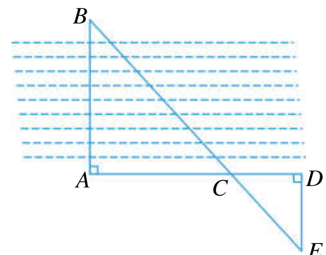


图 4-17

解 $\because$ $AB\perp AD, DE\perp AD$,

$\therefore$ $\angle BAC=\angle EDC=\mathrm{Rt}\angle$.

又 $\because$ $\angle ACB=\angle DCE$,

$\therefore$ $\triangle ABC\backsim\triangle DEC$（有两个角对应相等的两个三角形相似），

$\therefore$ $\dfrac{AC}{CD}=\dfrac{AB}{DE}$.

$\because$ $AC=45, CD=15, DE=20$,

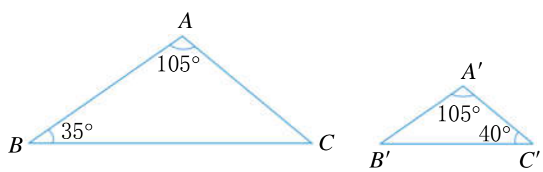
$\therefore$ $\dfrac{45}{15}=\dfrac{AB}{20}$,

$\therefore$ $AB=\dfrac{45\times 20}{15}=60(\mathrm{m})$.

答：河宽 AB 是 60 m.

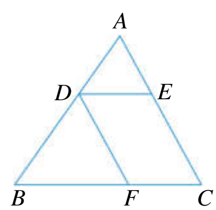
课内练习 KENEILIANXI

1. 能否判定如图$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$相似？为什么？



（第 1 题）

2. 如图，点 D,E,F 分别在$\triangle ABC$的各条边上，且 $DE/\!/BC, DF/\!/AC$. 请尽可能多地找出图中的相似三角形，并说明理由.

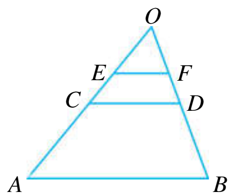


（第 2 题）

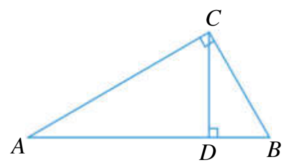
作业题 ZUOYETI

A 1. 如图，已知 $EF/\!/CD/\!/AB$，写出图中的相似三角形.

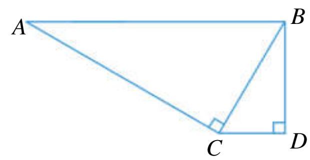
2. 如图，在△ABC 中，$\angle ACB=\mathrm{Rt}\angle$，$CD\perp AB$ 于点 D. 试写出图中的相似三角形.



（第 1 题）



（第 2 题）



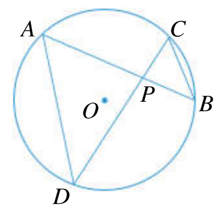
（第 3 题）

3. 如图，已知 $\angle ACB=\angle CDB=\mathrm{Rt}\angle$. 图中这两个三角形相似吗？如果你认为相似，请说明理由；如果你认为不一定相似，请添加一个条件，使这两个三角形一定相似.

4. 已知：如图，在⊙O 中，弦 AB 与弦 CD 交于点 P.

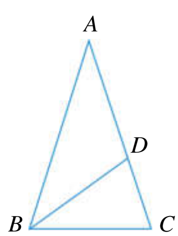
（1）求证：$\triangle ADP\backsim\triangle CBP$.

（2）判断 $AP\cdot BP=DP\cdot CP$ 是否成立，并给出证明.

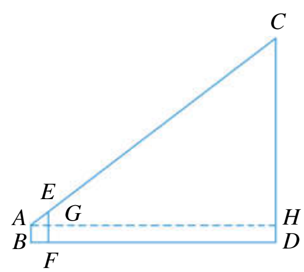


（第 4 题）

B 5. 如图，等腰三角形 ABC 的顶角 $\angle A=36°$，BD 是 $\angle ABC$ 的平分线. 判断点 D 是不是线段 AC 的黄金分割点，并说明理由.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 小明和他的同学用如图方法测量一幢楼的楼高：线段 AB，EF，CD 分别表示人、竹竿、楼房的高度，且点 A，E，C 在一条直线上. 测得人和竹竿的水平距离为 1.5 m，人和楼房的水平距离为 20 m，人的高度为 1.6 m，竹竿的高度为 2.8 m，据此可求出楼高. 请你给出这种测量方法的数学解释，并算出楼高.

三角形相似还有下面的判定定理：

两边对应成比例，且夹角相等的两个三角形相似.

选学 下面给出证明.

已知：如图 4-18，在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，$\angle C=\angle C'$，$\dfrac{C'A'}{CA}=\dfrac{C'B'}{CB}$.

求证：$\triangle CAB\backsim\triangle C'A'B'$.

证明 如图 4-18，在$\triangle ABC$的 CA 边上截取 $CD=C'A'$，过点 D 作 $DE/\!/AB$，交 CB 于点 E，则$\triangle CDE\backsim\triangle CAB$（根据什么？），

$\therefore\ \dfrac{CD}{CA}=\dfrac{CE}{CB}$（相似三角形的对应边成比例）.

$\because\ \dfrac{C'A'}{CA}=\dfrac{C'B'}{CB}$，

$\therefore\ \dfrac{CD}{CA}=\dfrac{C'A'}{CA}=\dfrac{C'B'}{CB}$，

$\therefore\ \dfrac{C'B'}{CB}=\dfrac{CE}{CB}$，

$\therefore\ C'B'=CE$.

又$\because\ \angle C=\angle C'$，

$\therefore\ \triangle C'A'B'\cong\triangle CDE$，

$\therefore\ \triangle CAB\backsim\triangle C'A'B$.

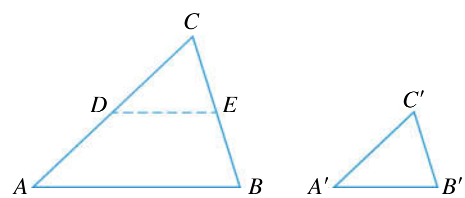


图 4-18

例2 图 4-19 是用卡钳测量容器内径的示意图. 现量得卡钳上 A，D 两端点的距离为 5 cm，$\dfrac{AO}{BO}=\dfrac{DO}{CO}=\dfrac{1}{2}$. 求容器的内径 BC.

解 $\left.\begin{aligned}&\angle AOD=\angle BOC\\&\dfrac{AO}{BO}=\dfrac{DO}{CO}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\triangle AOD\backsim\triangle BOC$（两边对应成比例，且夹角相等的两个三角形相似），

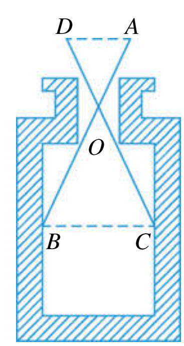


图 4-19

$\therefore \quad \dfrac{AD}{BC}=\dfrac{AO}{BO}$,

即$\dfrac{5}{BC}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore \quad BC=2\times5=10(\text{cm})$.

答:容器的内径 BC 为 10cm.

例3 已知:如图 4-20,点 D,E 分别在 AB,AC 上,且$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$. 求证:$DE/\!/BC$.

证明 $\left.\begin{matrix}\angle A=\angle A\\ \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\triangle ADE\backsim\triangle ABC$ (根据什么?).

$\therefore \quad \angle ADE=\angle B$(相似三角形的对应角相等).

$\therefore \quad DE/\!/BC$.

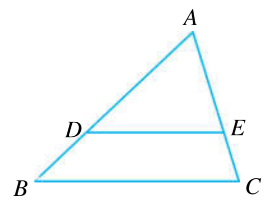
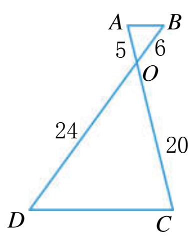


图 4-20

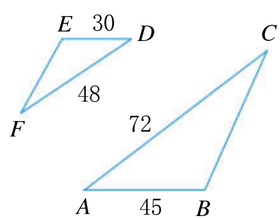
课内练习 KENEILIANXI

1. 分别判断如图各对三角形是否相似.

(1) AC 与 BD 相交于点 O. (2) $\angle A=\angle D$.

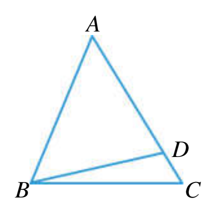


(第 1(1)题)



(第 1(2)题)

2. 如图,D 为 $\triangle ABC$ 的边 AC 上一点. 若要使 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACB$ 相似,可添加什么条件? 你有几种不同方法?

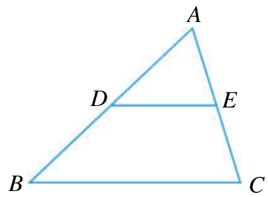


(第 2 题)

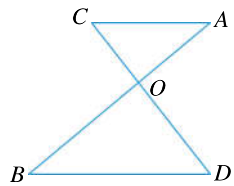
作业题 ZUOYETI

A **1.** 已知：如图，在$\triangle ABC$中，D,E分别是AB,AC上的点，$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$.

求证：$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.



（第 1 题）



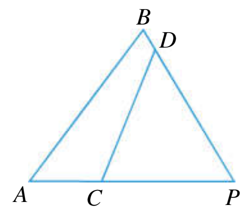
（第 2 题）

2. 已知：如图，AB与CD交于点O，且$\dfrac{AO}{BO}=\dfrac{CO}{DO}$.

求证：$AC\parallel BD$.

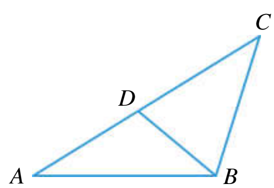
3. 求证：顶角相等的两个等腰三角形相似.

4. 如图，在$\triangle APB$中，C,D分别为AP,BP上的点.若$\dfrac{CP}{PB}=\dfrac{DP}{PA}=\dfrac{3}{4}$，$AB=8$ cm，求CD的长.

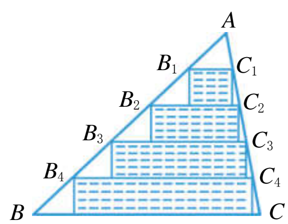


（第 4 题）

B **5.** 如图，在$\triangle ABC$中，D是AC上一点. 已知$AB^2=AD\cdot AC$，$\angle ABD=40°$. 求$\angle C$的度数.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 给一版墙报镶边，需要 4 cm 宽的彩色纸条 48 cm. 现有如图一张三角形彩色纸零料，其中$BC=25$ cm，BC边上的高线长为 20 cm. 小慧给出一种裁纸方法：如图，将AB,AC分别五等分，然后连结两边对应的点，并以这些连结线为一边作矩形. 剪下矩形纸条（图中阴影部分）作为墙报镶边的材料. 问：小慧的这种方法能满足这版墙报镶边的需要吗？请说明理由.

三角形相似还有下面的判定定理：

三边对应成比例的两个三角形相似.

选学 下面给出证明.

已知：如图 4-21，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$.

求证：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

证明 如图 4-21，在$A'B'$上截取$A'D=AB$，作$DE/\!/B'C'$，交$A'C'$于点E，则$\triangle A'DE\backsim\triangle A'B'C'$（根据什么？），

$$\therefore\ \frac{A'D}{A'B'}=\frac{DE}{B'C'}=\frac{A'E}{A'C'}.$$

$$\because\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'},$$

$$\therefore\ \frac{A'D}{A'B'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'},$$

$$\therefore\ \frac{DE}{B'C'}=\frac{BC}{B'C'},\ \frac{A'E}{A'C'}=\frac{AC}{A'C'},$$

$\therefore\ DE=BC, A'E=AC,$

$\therefore\ \triangle ABC\cong\triangle A'DE,$

$\therefore\ \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'.$

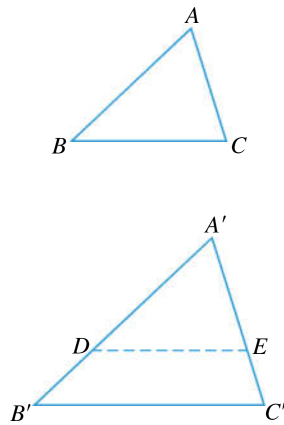


图 4-21

例4 如图 4-22，判断 4×4 方格中的两个三角形是否相似，并说明理由.

分析 要判断$\triangle ABC$与$\triangle EFD$是否相似，从角的方面较难确定，但容易计算每个三角形的边长，可通过判断边是否对应成比例来判定.

解 设 4×4 方格中每个小正方形的边长为 1，根据勾股定理，得

$AB=2\sqrt{2}, BC=\sqrt{10}, CA=\sqrt{2};$

$EF=2\sqrt{5}, FD=5, DE=\sqrt{5}.$

$$\therefore\ \frac{CA}{DE}=\frac{AB}{EF}=\frac{BC}{FD}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},$$

$\therefore\ \triangle ABC\backsim\triangle EFD$（三边对应成比例的两个三角形相似）.

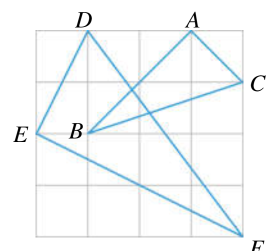


图 4-22

例5 已知：如图 4-23，O 为$\triangle ABC$ 内一点，A'，B'，C'分别是 OA，OB，OC 上的点，且$\dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{OC'}{OC}$. 求证：$\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$.

分析 由已知容易发现$\triangle OA'B' \backsim \triangle OAB$，$\triangle OA'C' \backsim \triangle OAC$，$\triangle OB'C' \backsim \triangle OBC$，由这三对相似三角形的对应边成比例，我们不难得到$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$ 的对应边成比例.

证明 如图 4-23，在$\triangle OA'B'$与$\triangle OAB$ 中，

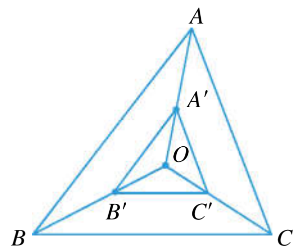


图 4-23

$\because$ $\angle A'OB'=\angle AOB$，$\dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OB'}{OB}$，

$\therefore$ $\triangle OA'B' \backsim \triangle OAB$（根据什么？），

$\therefore$ $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{OA'}{OA}$.

同理可证 $\dfrac{A'C'}{AC}=\dfrac{OA'}{OA}$.

$\therefore$ $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC}$.

同理可证 $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}$.

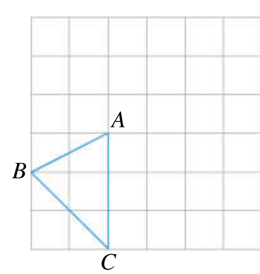
$\therefore$ $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{A'C'}{AC}$，

$\therefore$ $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$（三边对应成比例的两个三角形相似）.

课内练习 KENEILIANXI

1. 求证：任何两个等边三角形都相似. 你有几种不同的证明方法？

2. 如图，$\triangle ABC$ 的三个顶点都在方格纸的格点上. 在方格纸内画$\triangle A'B'C'$，使$\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$，相似比为 $2:1$，且顶点都在格点上.

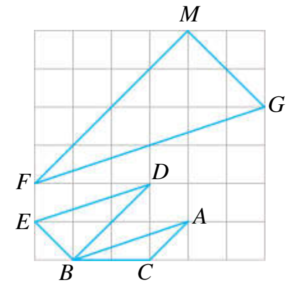


（第 2 题）

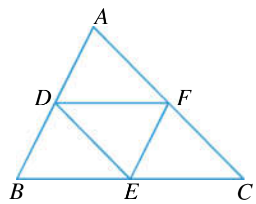
作业题 ZUOYETI

A 1. 如图，三个三角形的顶点都在方格纸的格点上. 它们中哪些三角形相似？请说明理由.

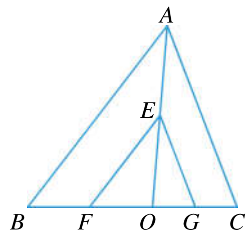
2. 如图，在$\triangle ABC$中，D,E,F分别是AB，BC，CA的中点. 求证：$\triangle EFD \backsim \triangle ABC$，并说出$\triangle EFD$与$\triangle ABC$的相似比.



（第 1 题）



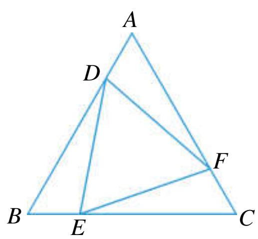
（第 2 题）



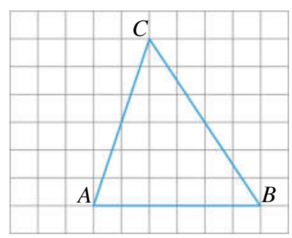
（第 3 题）

3. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，点F,O,G在BC边上，点E在AO上，$\dfrac{OF}{OB}=\dfrac{OE}{OA}=\dfrac{OG}{OC}$. 求证：$\triangle EFG \backsim \triangle ABC$.

B 4. 如图，在等边三角形ABC中，D,E,F分别是AB,BC,CA上的点，且$AD=BE=CF$. 找出图中所有相似的三角形（不要求证明）.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，$\triangle ABC$的三个顶点都在格点上. 在方格纸内作$\triangle A'B'C'$，使$\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$，相似比为$1:2$，且各顶点都在格点上.

6. 一条直角边和斜边对应成比例的两个直角三角形一定相似吗？证明你的判断.

4·5 相似三角形的性质及其应用

在 10 倍的放大镜下看到的三角形与原三角形相比，三角形的边长、周长、角、面积这些量中，哪些被放大 10 倍？

根据相似三角形的定义，我们可得到相似三角形的两个基本性质：相似三角形的对应角相等，对应边成比例. 它们的应用非常广泛.

例1 如图 4-24，$\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$，相似比为 $\dfrac{B'C'}{BC}=k$. 求这两个三角形的角平分线 $A'D'$ 与 AD 的比.

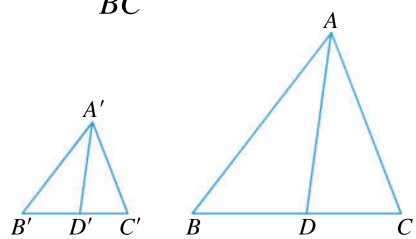


图 4-24

解 $\because$ $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$，

$\therefore$ $\angle B'=\angle B$，$\angle B'A'C'=\angle BAC$.

$\because$ $A'D'$，AD 分别是 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的角平分线，

$\therefore$ $\angle B'A'D'=\dfrac{1}{2}\angle B'A'C'$，$\angle BAD=\dfrac{1}{2}\angle BAC$，

$\therefore$ $\angle B'A'D'=\angle BAD$，

$\therefore$ $\triangle A'B'D' \backsim \triangle ABD$（有两个角对应相等的两个三角形相似），

$\therefore$ $\dfrac{A'D'}{AD}=\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}=k$.

例2 已知：如图 4-25，BD，CE 是 $\triangle ABC$ 的两条中线，P 是它们的交点.

求证：$\dfrac{DP}{BP}=\dfrac{EP}{CP}=\dfrac{1}{2}$.

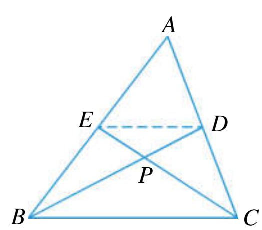


图 4-25

证明 如图 4-25，连结 DE.

$\because$ BD，CE 是 $\triangle ABC$ 的两条中线，

$\therefore$ $DE \underset{=}{\parallel} \dfrac{1}{2}BC$.

$\therefore\quad \angle EDB=\angle DBC,\angle DEC=\angle ECB,$

$\therefore\quad \triangle DEP\backsim\triangle BCP$（根据什么？）.

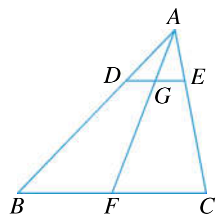
$$\therefore\quad \frac{DP}{BP}=\frac{EP}{CP}=\frac{DE}{BC}=\frac{1}{2}.$$

例 2 中，如果再作 BC 边上的中线，这条中线与 AC 边上的中线 BD 的交点也必定分 BD 成 1∶2 的两条线段，也就是点 P. 这就证明了三角形的三条中线相交于一点. 三角形三条中线的交点叫做三角形的重心（centroid）. **三角形的重心分每一条中线成 1∶2 的两条线段.**

课内练习 KENEILIANXI

1. 已知$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，相似比为$\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{2}{3}$，$AD$，$A'D'$分别是$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的一条中线. 求 AD 与 $A'D'$的比.

2. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，D,E,F 分别是 AB，AC，BC 上的点，$DE\parallel BC$，$BF=CF$，AF 交 DE 于点 G. 求证：$DG=EG$.



（第 2 题）

探究活动 TANJIUHUODONG

作用于物体的各部分的重力，可以看做一个大小等于各个重力总和的力作用于物体的某一点，这一点就叫做物体的重心. 现在我们来做一个实验. 任意剪一个三角形纸板（图 4-26），在它的顶点系一根线，把三角形纸板悬挂起来，在纸板上画出悬线的延长线 AD. 这条延长线也就是纸板所受重力的作用线. 观察 AD 所在的位置，你发现了什么？然后换一个顶点把三角形纸板悬挂起来，同样在纸板上画出重力作用线（图 4-27），你又发现了什么？这两条重力作用线的交点即物理意义上纸板的重心. 它和三角形的数学意义上的重心有什么关系？

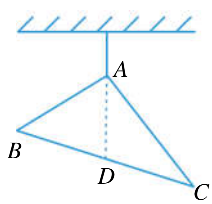


图 4-26

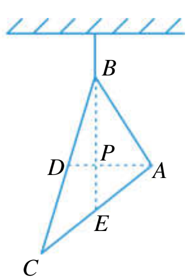
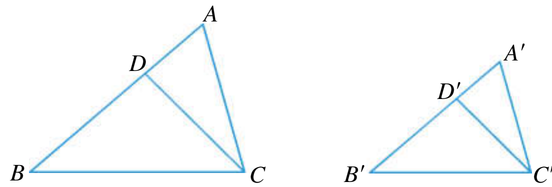


图 4-27

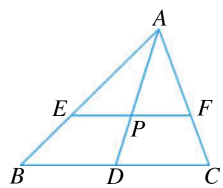
作业题 ZUOYETI

A **1.** 如图，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，相似比为 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{4}{3}$. D，D' 分别是 AB，$A'B'$ 上的点，且 $AD=\dfrac{1}{3}AB$，$A'D'=\dfrac{1}{3}A'B'$. 求 CD 与 $C'D'$ 的比.

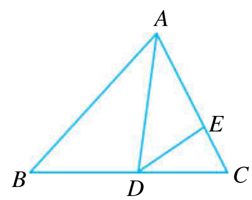


（第 1 题）

2. 如图，AD 为 $\triangle ABC$ 的一条中线，P 为 $\triangle ABC$ 的重心，$EF /\!/ BC$，交 AB，AC 于点 E，F，交 AD 于点 P. 求 EF 与 BC 的比.



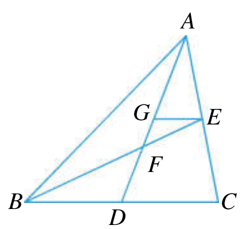
（第 2 题）



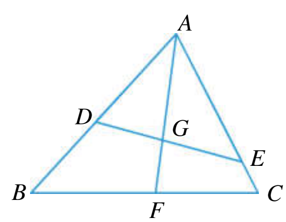
（第 3 题）

3. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是角平分线，$\angle ADE=\angle B$. 求证：$AD^2=AE\cdot AB$.

B **4.** 如图，在 $\triangle ABC$ 中，中线 AD，BE 相交于点 F. $EG /\!/ BC$，交 AD 于点 G. 求 AG 与 GF 的比.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D，E 分别是 AB，AC 上的点，$\triangle ADE \backsim \triangle ACB$，相似比为 $AD:AC=2:3$. $\triangle ABC$ 的角平分线 AF 交 DE 于点 G，交 BC 于点 F. 求 AG 与 GF 的比.

2

合作学习

任意画两个相似三角形,选择合适的方法探索下面的问题:

(1) 这两个三角形的周长之比与相似比有什么关系?

(2) 这两个三角形的面积之比与相似比有什么关系?

相似三角形的周长和面积有以下性质:

相似三角形的周长之比等于相似比;相似三角形的面积之比等于相似比的平方.

已知:如图 4-28,$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$,相似比为 k.

求证:$\dfrac{\triangle ABC\text{ 的周长}}{\triangle A'B'C'\text{的周长}}=k$,$\dfrac{\triangle ABC\text{ 的面积}}{\triangle A'B'C'\text{的面积}}=k^2$.

证明 $\because$ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$,相似比为 k,

$\therefore$ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CA}{C'A'}=k$(相似三角形的对应边成比例),

$\therefore$ $AB=kA'B'$,$BC=kB'C'$,$CA=kC'A'$,

$$\therefore \frac{\triangle ABC\text{ 的周长}}{\triangle A'B'C'\text{的周长}}=\frac{AB+BC+CA}{A'B'+B'C'+C'A'}=\frac{kA'B'+kB'C'+kC'A'}{A'B'+B'C'+C'A'}$$

$$=\frac{k(A'B'+B'C'+C'A')}{A'B'+B'C'+C'A'}=k.$$

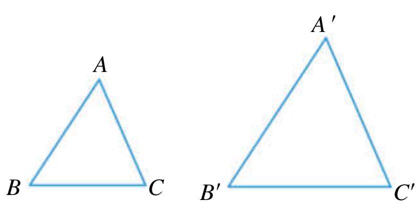


图 4-28

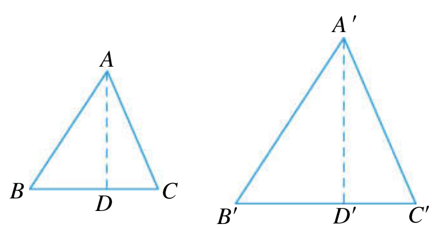


图 4-29

如图 4-29,分别作$\triangle ABC$,$\triangle A'B'C'$的 BC,$B'C'$边上的高线 AD,$A'D'$.

$\because$ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$,

$\therefore$ $\angle B=\angle B'$(相似三角形的对应角相等).

$\because$ AD,$A'D'$分别是 BC,$B'C'$边上的高线,

$\therefore\ \angle ADB=\angle A'D'B'=90°$,

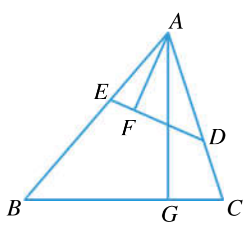
$\therefore\ \triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'$(有两个角对应相等的两个三角形相似),

$\therefore\ \dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}=k$,

$$\therefore\ \frac{\triangle ABC\text{的面积}}{\triangle A'B'C'\text{的面积}}=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot AD}{\frac{1}{2}B'C'\cdot A'D'}=\frac{BC}{B'C'}\cdot\frac{AD}{A'D'}=k\cdot k=k^2.$$

由上述证明过程可以看到,两个相似三角形的对应高线长之比也等于相似比.

做一做 ZUOYIZUO



如图,D,E 分别是 AC,AB 上的点,$\angle ADE=\angle B$,$AG\perp BC$ 于点 G,$AF\perp DE$ 于点 F. 若 $AD=3$,$AB=5$,求:

(1) $\dfrac{AG}{AF}$.

(2) $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的周长之比.

(3) $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比.

例3 图 4-30 是某市部分街道图,比例尺为 1∶100 000. 请估计三条道路围成的三角形地块 ABC 的实际周长和面积.

解 地图上的比例尺为 1∶100 000,就是地图上的 $\triangle ABC$ 与实际三角形地块的相似比为 $\dfrac{1}{100\ 000}$. 量得地图上 $AB=2.7$ cm,$BC=3.0$ cm,$AC=2.0$ cm,则地图上 $\triangle ABC$ 的周长为

$2.7+3.0+2.0=7.7$(cm).

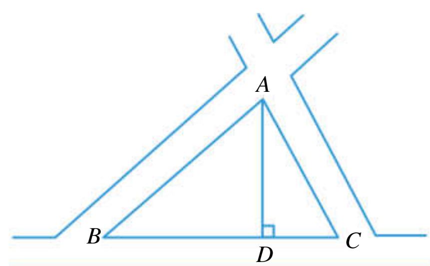


图 4-30

$\because\ \dfrac{7.7}{\text{三角形地块的实际周长}}=\dfrac{1}{100\ 000}$,

$\therefore$ 三角形地块的实际周长为 7.7×10^5 cm,即 7.7 km.

量得 BC 边上的高线长为 1.8 cm,

$\therefore$ 地图上$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}\times 3.0\times 1.8=2.7(\text{cm}^2)$.

$\because$ $\dfrac{2.7}{\text{三角形地块的实际面积}}=\left(\dfrac{1}{100\,000}\right)^2$,

$\therefore$ 三角形地块的实际面积为 $2.7\times 10^{10}\ \text{cm}^2$,即 $2.7\ \text{km}^2$.

答:估计这个三角形地块的实际周长为 7.7 km,实际面积为 $2.7\ \text{km}^2$.

例4 如图 4-31,在$\triangle ABC$中,$DE/\!/BC$,分别交 AB,AC 于点 D,E. 若要使$\triangle ADE$与四边形 $DBCE$ 的面积相等,则 AD 与 AB 的比应取多少?

解 $\because$ $DE/\!/BC$,

$\therefore$ $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

由$\dfrac{\triangle ADE\text{ 的面积}}{\text{四边形 }DBCE\text{ 的面积}}=1$,

得$\dfrac{\triangle ADE\text{ 的面积}}{\triangle ABC\text{ 的面积}}=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore$ $\left(\dfrac{AD}{AB}\right)^2=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore$ $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

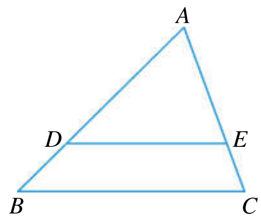


图 4-31

答:若$\triangle ADE$与四边形 $DBCE$ 的面积相等,则 AD 与 AB 的比为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

课内练习 KENEILIANXI

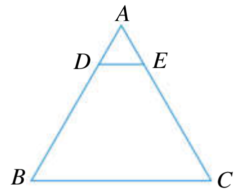
1. 把一个三角形的三边同比例放大. 填空:

(1) 如果三角形的边长扩大到原来的 100 倍,那么三角形的周长扩大到原来的______倍;面积扩大到原来的______倍.

(2) 如果三角形的周长扩大到原来的 100 倍,那么三角形的边长扩大到原来的______倍.

(3) 如果三角形的面积扩大到原来的 100 倍,那么三角形的边长扩大到原来的______倍.

2. 如图，在等边三角形 ABC 中，点 D,E 分别在边 AB,AC 上，$DE/\!/BC$. 若 $BC=8$ cm，$AD:DB=1:3$，则 $\triangle ADE$ 的周长等于______cm，$\triangle ADE$ 的面积等于______cm^2.



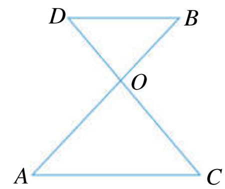
（第 2 题）

作业题 ZUOYETI

A 1. 已知 $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$，相似比为 2，则它们的周长之比是______，面积之比是________.

2. 请解答本节节前语中的问题.

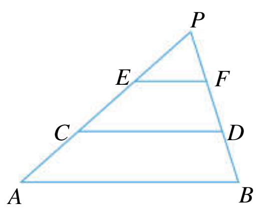
3. 如图，AB,CD 相交于点 O，$AC/\!/BD$，$AO:BO=3:2$，$\triangle ACO$ 的周长为 18 cm. 求 $\triangle BDO$ 的周长.



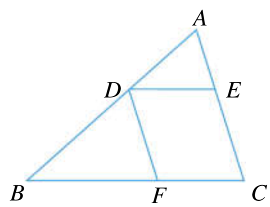
（第 3 题）

4. 求三角形的三条中位线所围成的三角形与原三角形的面积之比.

B 5. 如图，在 $\triangle ABP$ 中，$AB/\!/CD/\!/EF$，$AC=CE=EP$，$\triangle PAB$ 的面积为 18 cm^2. 求四边形 $CDFE$ 的面积.



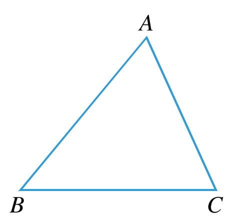
（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D,E,F 分别在边 AB,AC,BC 上，$DE/\!/BC$，$DF/\!/AC$. 已知 $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{2}{3}$，$\triangle ABC$ 的面积为 a. 求▱$DFCE$ 的面积.

C 7. 如图，已知 $\triangle ABC$. 作一条与 BC 平行的直线，把 $\triangle ABC$ 划分成两部分，使划分成的三角形和四边形的面积之比为 $1:2$，可怎样作？如果要使划分成的两部分的面积之比为 $1:n$ 呢？



（第 7 题）

下面我们来看相似三角形性质的一些实际应用.

例5 如图 4-32,屋架跨度的一半 $OP=5$ m,高度 $OQ=2.25$ m. 现要在屋顶上开一个天窗,天窗高度 $AC=1.20$ m,AB 在水平位置. 求 AB 的长(精确到 0.01 m).

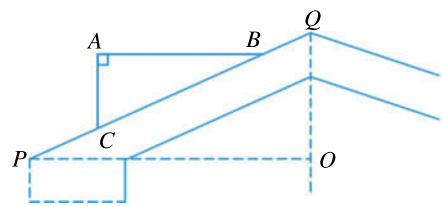


图 4-32

解 由题意,得 $AB//PO$,

$\therefore\ \angle ABC=\angle OPQ.$

又 $\because\ \angle CAB=\angle POQ=\text{Rt}\angle$,

$\therefore\ \triangle ABC\backsim\triangle OPQ$,

$\therefore\ \dfrac{AB}{OP}=\dfrac{AC}{OQ}$,

$\therefore\ AB=\dfrac{OP\times AC}{OQ}=\dfrac{5\times1.20}{2.25}\approx2.67(\text{m}).$

答:AB 的长约为 2.67 m.

例6 数学兴趣小组测量校园内一棵树高,有以下两种方法:

方法一:如图 4-33,把镜子放在离树(AB)8 m 的点 E 处,然后沿着直线 BE 后退到点 D,这时恰好在镜子里看到树梢顶点 A,再用皮尺量得 $DE=2.8$ m,观察者目高 $CD=1.6$ m.

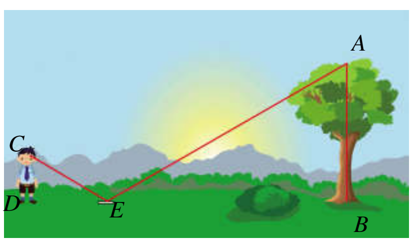


图 4-33

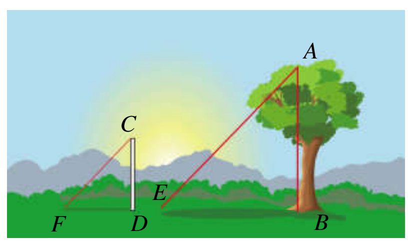


图 4-34

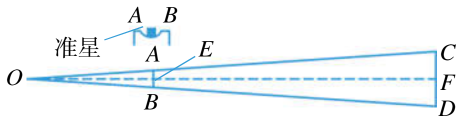
方法二:如图 4-34,把长为 2.40 m 的标杆 CD 直立在地面上,量出树的影长为 2.80 m,标杆的影长为 1.47 m.

分别根据上述两种不同方法求出树高(精确到 0.1 m).

请你自己写出求解过程,并与同伴探讨.还有其他测量树高的方法吗?

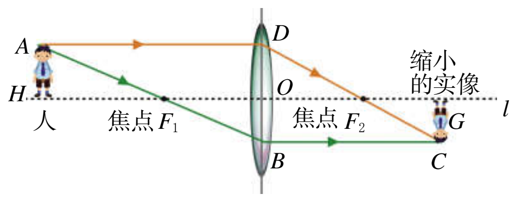
课内练习 KENEILIANXI

如图为步枪在瞄准时的示意图，从眼睛到准星的距离 OE 为 80 cm，步枪上的准星宽度 AB 为 2 mm，目标的正面宽度 CD 为 50 cm. 求眼睛到目标的距离 OF.



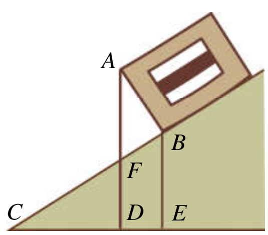
作业题 ZUOYETI

A 1. 凸透镜成像的原理如图所示，$AD // l // BC$. 若人到焦点的距离与焦点到凸透镜的中心线 DB 的距离之比为 5∶4，则人被缩小到原来的几分之几？

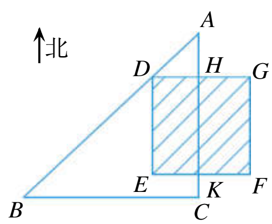


（第 1 题）

2. 如图，一只箱子沿着斜面向上运动，箱高 AB＝1.2 m. 当 BC＝2.4 m 时，点 B 离地面的距离 BE＝1.4 m，求此时点 A 离地面的距离(精确到 0.1 m).



（第 2 题）

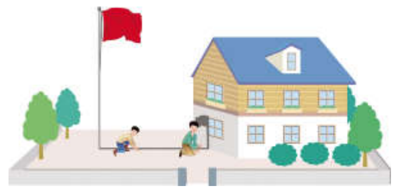


（第 3 题）

3. 如图，正方形城邑 $DEFG$ 的四面正中各有城门，出北门 20 步的 A 处(HA＝20 步)有一树木，出南门 14 步到 C 处(KC＝14 步)，再向西行 1 775 步到 B 处(CB＝1 775 步)，正好看到 A 处的树木(点 D 在直线 AB 上). 求城邑的边长.

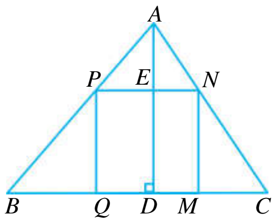
(本题是我国古代数学名著《九章算术》中“勾股”章的第二十题，原文是：“今有邑方不知大小，各中开门，出北门二十步有木，出南门十四步，折而西行一千七百七十五步见木. 问邑方几何？”)

B **4.** 小聪和他的同学利用影长测量旗杆高度（如图），当 1 m 长的直立竹竿的影长为 1.5 m 时，测量旗杆落在地上的影长为 21 m，落在墙上的影长为 2 m. 求旗杆的高度.



（第 4 题）

5. 有一块三角形余料 ABC，它的边 $BC=120$ mm，高线 $AD=80$ mm. 要把它加工成正方形零件，使正方形的一边在 BC 上，其余两个顶点分别在 AB，AC 上. 求加工成的正方形零件的边长.



（第 5 题）

设计题 SHEJITI

以 4～6 人为一组举行一次应用相似三角形的有关知识进行测量的实践活动. 每组测量的目标、内容和方法均可以自选. 在完成实践活动后，以组为单位写一份测量实践报告，在班内进行交流.

4·6 相似多边形

图形的相似性给人类的创造发明带来灵感. 19 世纪末法国机械师克莱兰·阿代尔设计的第三架飞行器的形状就是模仿蝙蝠.

合作学习 HEZUOXUEXI

观察图 4-35，分别求出图中两个四边形的各条边长（每小格的边长为 1 个单位），并比较各对应内角的大小. 然后与你的同伴议一议：

（1）这两个四边形的角之间有什么关系？

（2）这两个四边形的边之间有什么关系？

（3）这两个四边形的形状之间有什么关系？

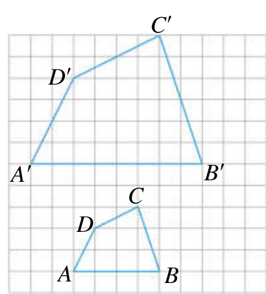


图 4-35

一般地，对应角相等，对应边成比例的两个多边形叫做相似多边形(similar polygon). 相似多边形对应边的比也叫做相似比. 例如，图 4-35 中，四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 相似，记做四边形 $ABCD \backsim$ 四边形 $A'B'C'D'$[1]，AB 与 $A'B'$ 的比就是四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 的相似比.

例1 矩形纸张的长与宽之比为 $\sqrt{2}$，沿长边对折，所得的矩形纸张是否和原来的矩形纸张相似？请说明理由.

解 沿长边对折后所得的矩形纸张和原来的矩形纸张相似. 理由如下：

如图 4-36，原来的纸张为矩形 $ABCD$，$\frac{BC}{AB}=\sqrt{2}$.

连结 BC 与 AD 的中点 F，E，则 EF 就把矩形 $ABCD$ 分为全等的两个矩形.

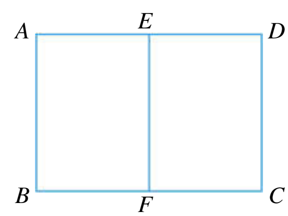


图 4-36

在矩形 $ABFE$ 中，

$$\frac{AB}{BF}=\frac{AB}{\frac{1}{2}BC}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{BF}=\frac{BC}{AB},$$

即矩形 $ABFE$ 与矩形 $BCDA$ 的对应边成比例.

而两个矩形的对应角相等，

所以矩形 $ABFE$ 与矩形 $BCDA$ 相似.

与相似三角形类似，相似多边形有以下性质：

相似多边形的周长之比等于相似比；相似多边形的面积之比等于相似比的平方.

如图 4-35，从四边形 $ABCD$ 到四边形 $A'B'C'D'$ 的改变过程中，图形的形状没有改变. 一般地，由一个图形改变为另一个图形，在改变的过程中保持形状不变(大小可以改变)，这样的图形改变叫做图形的相似. 图形的相似在人们的生活中有着广泛的应用. 例如地图的绘制，照片的放大与缩小

[1] 本套教材当用符号“∽”表示两个多边形相似时都把对应顶点字母写在对应位置上.

(图 4-37)等都是图形的相似的应用.

图 4-37

课内练习 KENEILIANXI

1. 判断题(对的在括号内打“√”,错的在括号内打“×”).

(1) 所有的正方形都相似. (　　)

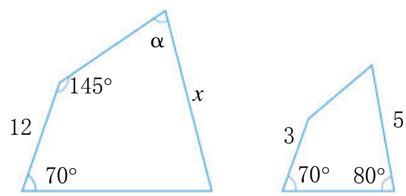
(2) 所有的矩形都相似. (　　)

(3) 所有的菱形都相似. (　　)

(4) 所有的正六边形都相似. (　　)

2. 已知四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 相似,AB 与 $A'B'$ 是对应边,BC 与 $B'C'$ 是对应边. 若 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{2}{3}$,则 $\frac{B'C'}{BC}=$______.

3. 在如图所示的相似四边形中,求未知的边长 x 和角度 α 的大小.



(第 3 题)

探究活动 TANJIUHUODONG

把标准纸(长与宽之比为 $\sqrt{2}$)一次又一次对开(图 4-38),按图 4-39 叠放起来. 你发现了什么有趣的现象? 你能给出数学解释吗?

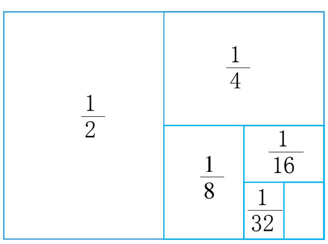


图 4-38

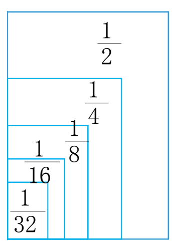
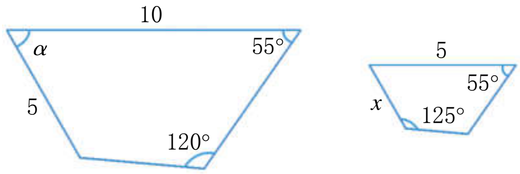


图 4-39

作业题 ZUOYETI

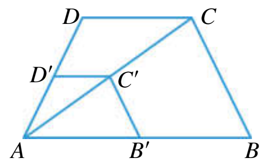
A **1.** 在如图所示的相似四边形中，求未知的边长 x和角度 α 的大小.



（第 1 题）

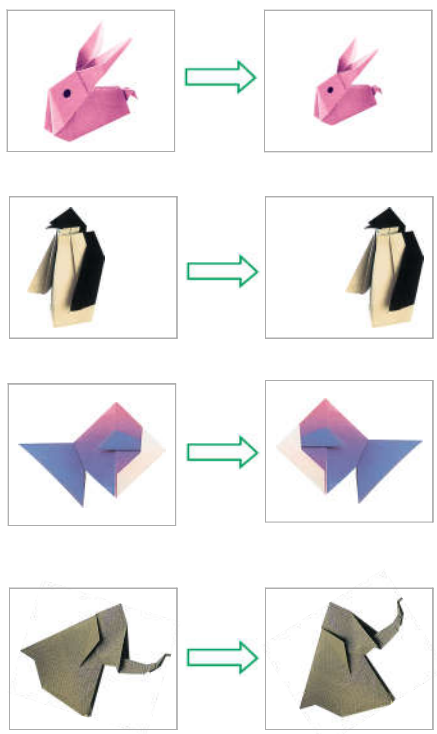
2. 在比例尺为 1∶100 000 的地图上，某开发区的图上面积为 25 cm^2，那么该开发区的实际面积是多少？

3. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，B'，C'，D' 分别是 AB，AC，AD 上的点，$B'C' /\!/ BC$，$C'D' /\!/ CD$. 判断四边形 $ABCD$ 与四边形 $AB'C'D'$ 是否相似，并说明理由.



（第 3 题）

4. 将下列各图形的变化与变化的名称用线连起来.



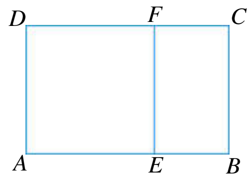
平移

相似（不全等）

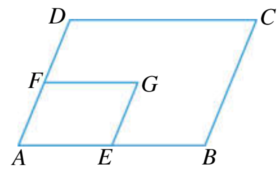
旋转

轴对称

B 5. 如图，矩形 $ABCD \backsim$ 矩形 $BCFE$，且 $AD=AE$. 求 $AB:AD$ 的值.



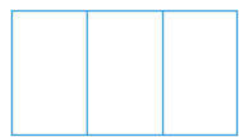
（第 5 题）



（第 6 题）

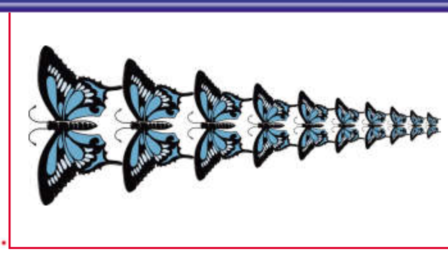
6. 如图，四边形 $AEGF \backsim$ 四边形 $ABCD$，点 E，F 分别在 AB，AD 上. 当点 E，F 满足什么条件时，四边形 $AEGF$ 的面积是四边形 $ABCD$ 的面积的 $\frac{1}{4}$？

C 7. 把一个长方形划分成三个全等的长方形（如图）. 若要使每一个小长方形与原长方形相似，则原长方形应满足什么条件？



（第 7 题）

4·7 图形的位似



这一组蝴蝶图案除彼此相似外，还有什么特点？

如图 4-40，O 是四边形 $ABCD$ 所在平面内任意一点. 连结 OA，OB，OC，OD，分别在 OA，OB，OC，OD 上截取 OA'，OB'，OC'，OD'，使得 $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=\frac{1}{2}$，连结 $A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$.

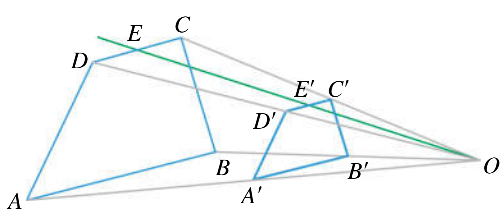


图 4-40

请与你的同伴议一议，四边形 $A'B'C'D'$ 与四边形 $ABCD$ 相似吗？它们在位置上有什么特点？过点 O 任意作一条射线，分别交两个四边形的边于点 E',E（图 4-40），则 OE' 与 OE 的比是多少？

一般地，如果两个图形满足以下两个条件：所有经过对应点的直线都相交于同一点；这个交点到两个对应点的距离之比都相等，那么这两个图形就叫做**位似图形**（homothetic figures），经过各对应两点的直线的交点叫做**位似中心**（homothetic centre）. 位似中心到两个对应点的距离之比叫做**位似比**（homothetic ratio）. 如图 4-40，分别经过点 A 与 A'，点 B 与 B'，点 E 与 E' 等对应点的各条直线都交于点 O，各对应点到点 O 的距离之比都为 $\frac{1}{2}$（或 2），所以四边形 $A'B'C'D'$ 与四边形 $ABCD$ 是位似图形，点 O 就是它们的位似中心，位似比为 $\frac{1}{2}$. 从图 4-40 还可以看到，位似多边形必定是相似多边形，位似比也就是相似比.

利用图形的位似可以把一个图形放大或缩小. 若所画图形与原图形的位似比大于 1，则将图形放大；若所画图形与原图形的位似比小于 1，则将原图形缩小.

放缩尺是将图形进行放大或缩小的工具. 如图 4-41，点 O 的位置固定不变，在 A,A' 处装有画笔. 当画笔 A 沿图形 F 运动时，画笔 A' 画出图形 F'，图形 F' 将图形 F 放大了. 反之，图形 F 是图形 F' 的缩小图形. 位似比可通过调节点 B,D 的位置来确定.

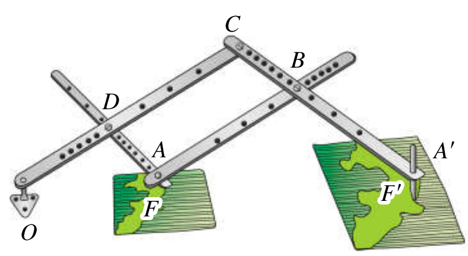


图 4-41

例1 如图 4-42，以坐标原点 O 为位似中心，作▱$ABCD$ 的位似图形，并把▱$ABCD$ 的边长放大 3 倍.

分析 把▱$ABCD$ 的边长放大 3 倍，即画一个与▱$ABCD$ 的位似比为 3∶1 的平行四边形.

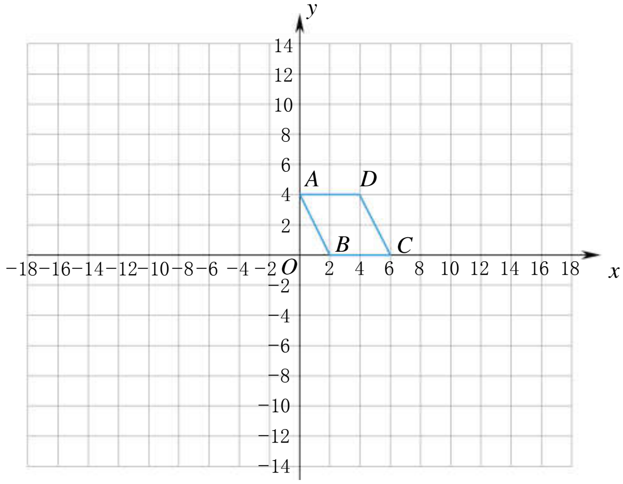


图 4-42

作法 如图 4-43.

1. 连结 OA，OB，OC，OD.

2. 分别延长 OA，OB，OC，OD 至 G，C，E，F，使 $\dfrac{OG}{OA}=\dfrac{OC}{OB}=\dfrac{OE}{OC}=\dfrac{OF}{OD}=3$.

3. 依次连结 GC，CE，EF，FG.

四边形 $GCEF$ 就是所求作的四边形.

如果按同样比例，反向延长 OA，OB，OC，OD，就得到四边形 $G'C'E'F'$，也是所求作的四边形.

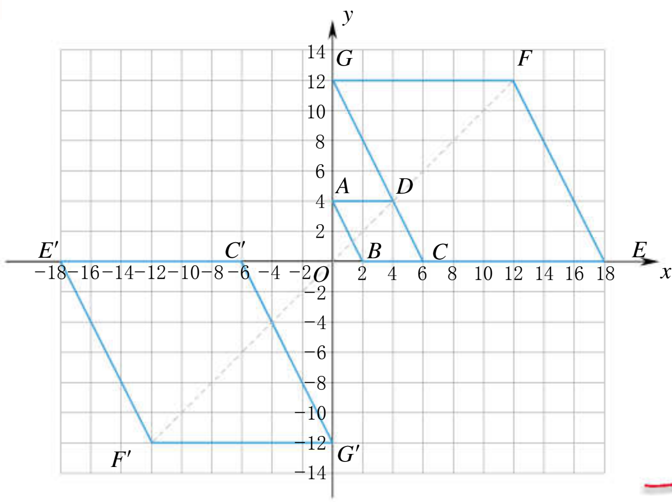


图 4-43

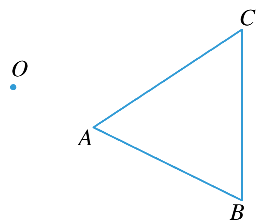
> **想一想**
>
> 四边形 $GCEF$ 与四边形 $G'C'E'F'$ 具有怎样的对称性？

比较图 4-43 中各对应点的坐标，我们不难发现以坐标原点为位似中心的位似图形有以下性质：

当以坐标原点为位似中心时，若原图形上点的坐标为(x,y)，位似图形与原图形的位似比为 k，则位似图形上的对应点的坐标为(kx,ky)或$(-kx,-ky)$.

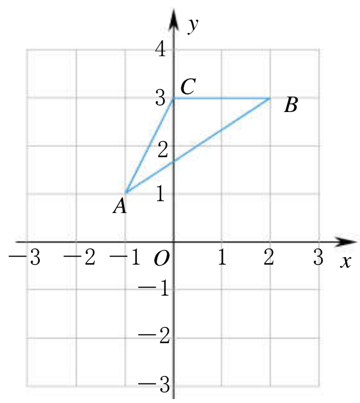
课内练习 KENEILIANXI

1. 如图，已知$\triangle ABC$和点O. 以O为位似中心，求作$\triangle ABC$的位似图形，并把$\triangle ABC$的边长缩小到原来的$\frac{1}{2}$.



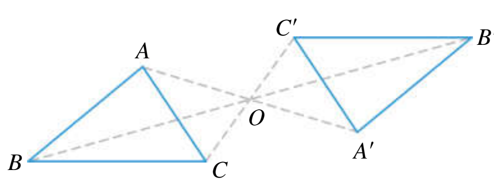
（第 1 题）

2. 如图，在直角坐标系中，$\triangle ABC$各顶点的坐标为$A(-1,1)$，$B(2,3)$，$C(0,3)$. 现以坐标原点O为位似中心，作与$\triangle ABC$的位似比为$\frac{2}{3}$的位似图形$\triangle A'B'C'$，并写出顶点A'，B'，C'的坐标.



（第 2 题）

3. 如图，$AB /\!/ A'B'$，$BC /\!/ B'C'$，$CA /\!/ C'A'$，AA'，BB'，CC'相交于点O. $\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$是位似图形吗？请简述理由.



（第 3 题）

作业题 ZUOYETI

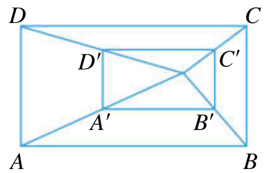
A **1.** 下列各组图形的各边都对应平行，判断它们是不是位似图形.

（1）矩形 $ABCD$ 与矩形 $A'B'C'D'$.

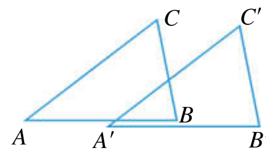
（2）$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$.

（3）图形 F 与图形 F'.

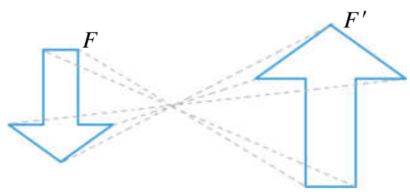
（4）梯形 $ABCD$ 与梯形 $A_1B_1C_1D_1$.



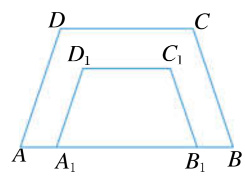
（第 1(1)题）



（第 1(2)题）

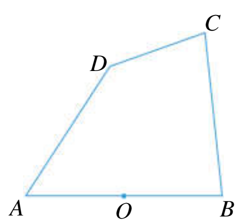


（第 1(3)题）

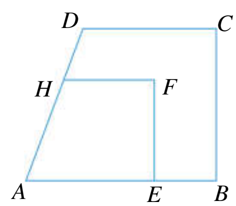


（第 1(4)题）

2. 如图，O 是 AB 的中点. 以 O 为位似中心，作与四边形 $ABCD$ 位似的图形，并使边长缩小到原来的 $\frac{1}{2}$.



（第 2 题）



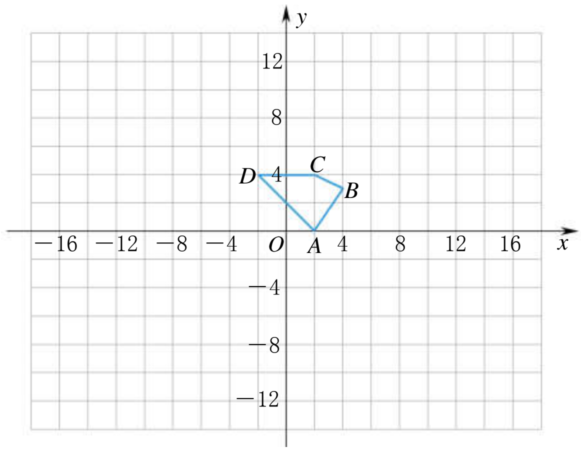
（第 3 题）

3. 如图，四边形 $AEFH$ 与四边形 $ABCD$ 是位似图形，位似比为 $\frac{2}{3}$，且四边形 $ABCD$ 的周长为 140 cm，面积为 900 cm^2. 求四边形 $AEFH$ 的周长和面积.

B **4.** 如图.

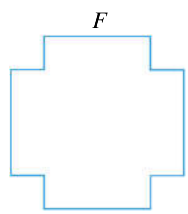
（1）写出四边形 $ABCD$ 的各个顶点的坐标.

（2）以坐标原点 O 为位似中心，作与四边形 $ABCD$ 的位似比为 3 的位似四边形 $A'B'C'D'$. 画出四边形 $A'B'C'D'$，并写出四边形 $A'B'C'D'$ 各顶点的坐标.



（第 4 题）

5. 如图，已知图形 F. 选取适当的一点为位似中心，适当的比为位似比，作图形 F 的位似图形 F'，使图形 F' 与图形 F 组成一幅轴对称的图形.

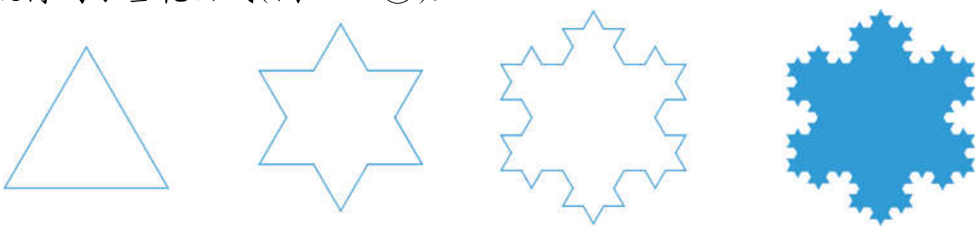


（第 5 题）

精彩的分形

你一定见过美丽的雪花,你仔细观察过雪花的形状吗? 在数学上,我们可以通过“分形”近似地得到雪花的形状.

将等边三角形(图4-44①)的每一边三等分,以居中那条线段为底边向外作等边三角形,并去掉所作的等边三角形的一条边,得到一个六角星(图 4-44②). 接着对每个等边三角形凸出的部分继续上述过程,即在每条边三等分后的中段, 像图 4-44③那样向外画新的等边三角形. 不断重复这样的过程,就得到了雪花曲线(图 4-44④).



① ② ③ ④

图 4-44

分形是这样一种图形,将其细微部分放大后,其结构看起来仍与原先的一样,这种现象叫做自相似,这种自相似的过程可以无限地继续下去. 雪花曲线就是一个分形的例子,它是瑞典数学家科赫(Koch,1870～1924 年)于 1904 年制作的,它有一个令人惊异的性质:具有有限的面积,但有着无限的周长!

蕨类植物(如图 4-45)的叶子形状也是分形的形象. 如果你观察分形羊

图 4-45

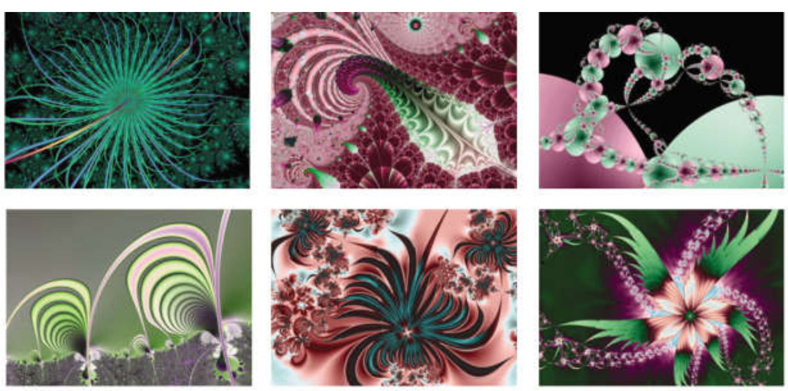


图 4-46

齿叶的任何一个部分，它会显现与原来羊齿叶一样的形状.分形羊齿叶的图案能够在计算机上制作出来.分形几何提供了一种描述自然界物体的数学手段，运用分形可以创作许多精美的图案，如图 4-46.

如果注意到分形连续不断，从大尺度到小尺度的自我复制，以及迭代操作的特点，我们就能作出一些简单的分形图.

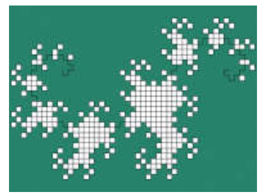


图 4-47

图4-47 这幅“龙”的分形图，看起来很复杂，其实它是简单几何图形的从大尺度到小尺度的自我复制.将一个等腰直角三角形(图4-48①)分割成两个全等的等腰直角三角形，右边一半不动，左边一半以斜边所在的直线为轴作轴对称，得图4-48②.类似地，再将图 4-48②中的每一个直角三角形进行分割和轴对称，得图 4-48③.这样一直作下去，就会得到一幅“龙”的分形图.你能画出下一步吗?试一试.

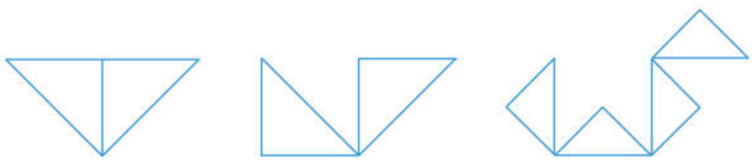

①　　②　　③

图 4-48

实践活动：自选一个起始图形，设计一个自相似和迭代的操作过程，作出一幅美丽的分形图案(有条件的可用计算机来进行).

将你的作品与同伴交流.

小结

XIAOJIE

填空.

1. 比例的基本性质：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow$_____.

2. 两条线段的__________叫做这两条线段的比.

如果四条线段a,b,c,d中，有$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么四条线段a,b,c,d叫做__________，简称__________.

如果三个数a,b,c满足比例式$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$（或$a:b=$_____），则b就叫做a,c的______.

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\Leftrightarrow b^2=$__________.

3. 基本事实：两条直线被_______（不少于三条）所截，所得的对应线段成比例.

4. ________，_______的两个三角形叫做相似三角形. 相似三角形_______的比叫做相似比.

5. __________三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似.

有_____角对应相等的两个三角形相似. 两边_________，且夹角相等的两个三角形相似. ________对应成比例的两个三角形相似.

6. 相似三角形的对应角________，对应边________. 相似三角形的周长之比等于________；相似三角形的面积之比等于____________.

7. 三角形三条中线的交点叫做____. 三角形的重心分每一条中线成________的两条线段.

8. 相似多边形的周长之比等于____；相似多边形的面积之比等于__________.

9. 由一个图形改变为另一个图形，在改变的过程中保持________不变（大小可以改变），这样的图形改变叫做图形的相似.

10. 当以______为位似中心时，若原图形上点的坐标为(x,y)，位似图形与原图形的位似比为k，则位似图形上的对应点的坐标为__________或__________.

填表.

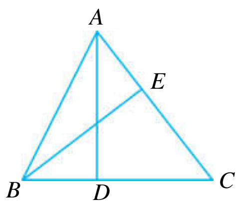
技能内容	学会程度		
	学　会	基本学会	不　会
进行简单比例式的变形			
分线段成比例的作图			
判定两个三角形相似			
应用相似三角形的性质进行简单的证明和计算			
作已知图形的位似图形			
应用相似多边形的性质进行简单的计算			

目标与评定

MUBIAOYUPINGDING

目标A 4.1 节 4.2 节

- 理解比例的基本性质：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$，会应用比例的基本性质进行简单的比例式的变形.
- 了解线段比和成比例线段的概念. 理解比例中项的概念.
- 了解黄金分割，会进行有关黄金分割的简单计算.
- 掌握基本事实：两条直线被一组平行线（不少于 3 条）所截，所得对应线段成比例.



（第 3 题）

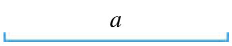
1. 由 $4a=7b$，可得比例式：______________.

2. 已知线段 $a=4$，$b=8$，则 a，b 的比例中项线段等于________.

3. 如图，AD，BE 是 $\triangle ABC$ 的两条高线. 找出一组比例线段，并写出比例式.

4. 已知 P 是线段 AB 的黄金分割点，$PA>PB$，$AB=4$cm，则 $PA=$_____cm.

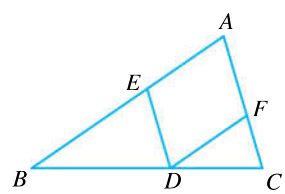
5. 已知一个长方形的长为线段 a，宽与长之比为黄金比，求这个长方形的面积.



（第 6 题）

6. 把已知线段 a（如图）分成 5∶3 的两部分.

7. 如图，过菱形 $AEDF$ 的顶点 D 作直线，分别交 AE 的延长线于点 B，交 AF 的延长线于点 C. 若 $FC=\frac{2}{3}AF$，求 $\frac{BE}{AF}$.



（第 7 题）

目标B 4.3 节 4.4 节

- 了解相似三角形的概念.
- 探索两个三角形相似的判定定理：两角对应相等的两个三角形相似；两边对应成比例，且夹角相等的两个三角形相似；三边对应成比例的两个三角形相似.
- 会在简单情况下判定两个三角形相似.

8. 下面给出了关于三角形相似的一些命题：

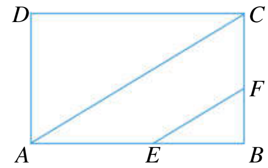
①等边三角形都相似；　②等腰三角形都相似；

③直角三角形都相似；　④等腰直角三角形都相似；

⑤全等三角形都相似.

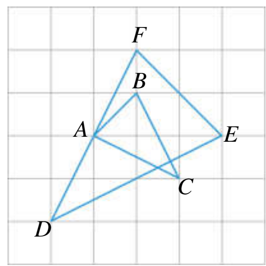
其中正确的有_______________.

9. 已知:如图,在矩形 $ABCD$ 中,AC 是对角线,$EF\parallel AC$,交 AB,BC 于点 E,F. 求证:$\triangle EBF\backsim\triangle CDA$.

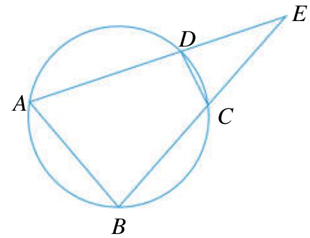


(第 9 题)

10. 如图,判断$\triangle ABC$ 与$\triangle EFD$ 是否相似,并说明理由.



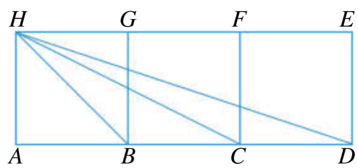
(第 10 题)



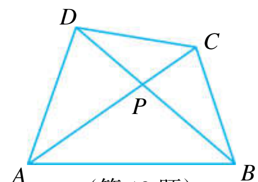
(第 11 题)

11. 已知:如图,延长圆内接四边形的边 AD 和边 BC,相交于点 E.
求证:$\triangle ABE\backsim\triangle CDE$.

12. 如图,四边形 $ABGH$,四边形 $BCFG$,四边形 $CDEF$ 都是正方形.请从图中找出三对相似三角形,要求其中一对必须不是直角三角形,并说明这一对三角形相似的理由.



(第 12 题)

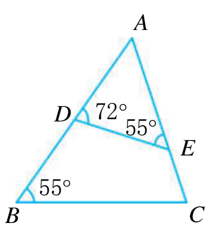


(第 13 题)

13. 已知:四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 P,$\angle ADB=\angle BCA$.
求证:$\triangle ABP\backsim\triangle DCP$.

目标C
4.3 节 4.5 节

- 了解相似三角形的对应角相等,对应边成比例.
- 了解相似三角形的周长之比等于相似比, 面积之比等于相似比的平方.
- 了解三角形的重心的概念和性质.
- 会利用相似三角形的性质解决有关测量等的简单实际问题.



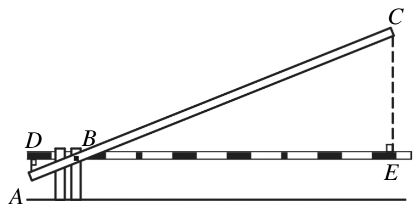
(第 14 题)

14. 如图,D,E 分别是 AB,AC 上的点.

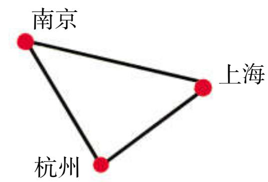
(1) 求$\angle A$,$\angle C$ 的度数.

(2) 若 $AD=2$,$AC=4$,则 BC 是 DE 的几倍?

15. 铁路道口的栏杆如图，$AB=1.25\,\text{m}$，$BC=16.5\,\text{m}$. 若要使栏杆 C 端从栏杆水平位置上升到垂直距离（CE）11.22 m 处，则栏杆 A 端应下降的垂直距离（AD）为多少米？



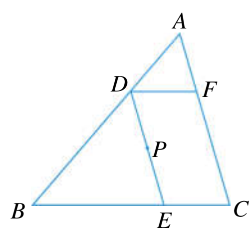
（第 15 题）



（第 16 题）

16. 估计上海、南京、杭州三城市连线的实际总长（根据你所用地图的比例尺，结果精确到 0.1 km）.

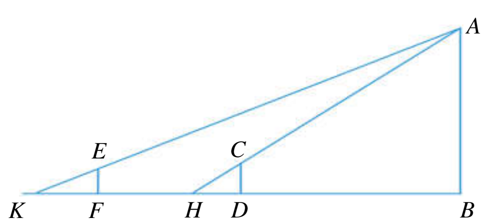
17. 已知：如图，点 P 是 $\triangle ABC$ 的重心. 过 P 作 AC 的平行线，分别交 AB，BC 于点 D，E；作 $DF\parallel EC$，交 AC 于点 F. 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $18\,\text{cm}^2$，求四边形 $ECFD$ 的面积.



（第 17 题）

18. 现有一张直角三角形纸片，你能把它一刀剪成两个相似三角形吗？说出你的剪法，并画出示意图.

19. 刘徽（生于公元 250 年左右）是中国古代伟大的数学家，他的杰作《九章算术注》和《海岛算经》是我国宝贵的数学遗产. 在《海岛算经》一文中，刘徽精心选编了九个测量问题，其中第一题的题意如下：如图，观察海岛（AB），立两标杆（CD，EF），并使点 F，D，B 在同一直线上，两标杆前后相距 1 000 步，标杆均高 3 丈. 若从标杆 CD 后退 123 步，观察者的眼睛 H（靠近地面）与标杆顶端 C，岛的峰顶 A 在同一直线上；若从标杆 EF 后退 127 步，同样观察者的眼睛 K（靠近地面）与标杆的顶端 E，岛的峰顶 A 也在同一直线上. 问：海岛的峰高 AB 和海岛离标杆 CD 的距离 BD 分别为多少（注：1步 $=$ 6 尺，1 丈 $=$ 10 尺）？



（第 19 题）

目标D 4.6节 4.7节

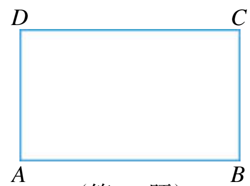
●了解相似多边形的概念.

●知道相似多边形的对应角相等，对应边成比例，周长之比等于相似比，面积之比等于相似比的平方.

●了解图形的位似.

●能够利用位似将一个图形放大或缩小.

20. 一张长方形纸如图，$AB=12$，$AD=7.2$. 把它裁成两张长方形纸，使得其中一张和原纸相似，应怎样裁？有没有可能使两张纸都和原纸相似？



（第 20 题）

21. 一个比例为1:10 000 的矩形草坪示意图的长、宽分别为 5 cm，2 cm.求草坪的实际面积.

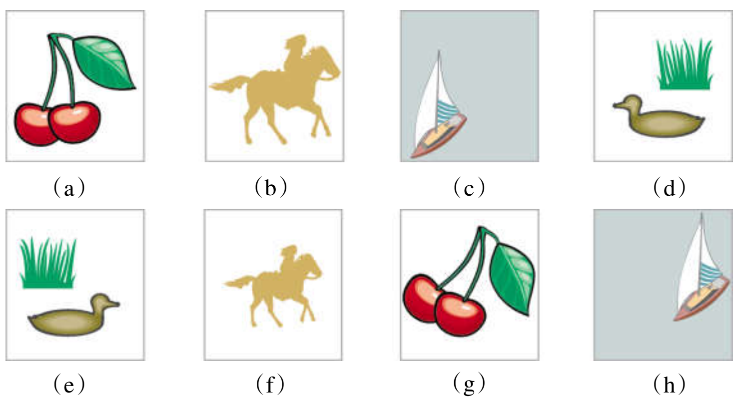
22. 下图 8 个图形分别是原图形经平移、旋转、轴对称、相似（不全等）所得的图形.请将它们配对，在下面的空格中填入相应的编号.

（1）平移：__________和__________.

（2）旋转：__________和__________.

（3）轴对称：______和__________.

（4）相似（不全等）：__________和__________.



（第 22 题）

23. 已知图形 F 和点 O（如图）. 以点 O 为位似中心，作图形 F 的位似图形 F'，使图形 F 与图形 F' 的位似比为 $\frac{1}{2}$.

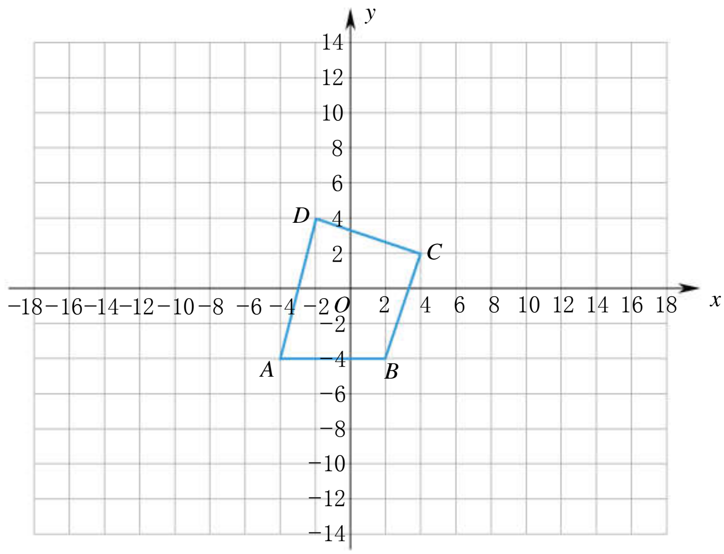
（第 23 题）

24. 在直角坐标系中，四边形$ABCD$的位置如图所示. 以坐标原点O为位似中心，作四边形$ABCD$的位似四边形$A'B'C'D'$，使它与四边形$ABCD$的位似比为3. 要求：

（1）写出点A，B，C，D的坐标.

（2）作四边形$ABCD$的位似图形.

（3）写出四边形$A'B'C'D'$各对应顶点的坐标.

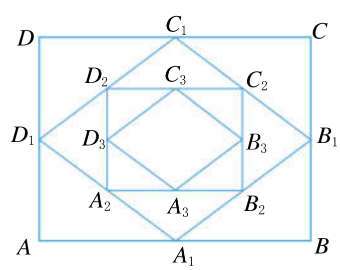


（第24题）

25. 如图，在矩形$ABCD$中，$AB=8$，$BC=6$. 顺次连结各边中点，得菱形$A_1B_1C_1D_1$；再顺次连结菱形$A_1B_1C_1D_1$的各边中点，得矩形$A_2B_2C_2D_2$；再顺次连结矩形$A_2B_2C_2D_2$的各边中点，得菱形$A_3B_3C_3D_3$，……这样继续下去.

（1）找出图中各组相似多边形，并求出每组相似多边形中相邻两个多边形的相似比.

（2）分别求出四边形$A_6B_6C_6D_6$，四边形$A_7B_7C_7D_7$的周长和面积.



（第25题）

义务教育教科书

数　学　九年级上册

YIWU JIAOYU JIAOKESHU

SHUXUE JIU NIANJI SHANGCE

责任编辑　华　琼　　　**责任校对**　韦　勇

装帧设计　在线广告传媒有限公司　　　**责任印务**　陆　江

出　　版　浙江教育出版社

（杭州市天目山路 40 号　电话：0571-85170300-80928）

发　　行　浙江省新华书店集团有限公司

图文制作　杭州万方图书有限公司

印　　刷　杭州印校印务有限公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16

印　　张　10.5

字　　数　210 000

版　　次　2014 年 6 月第 1 版

印　　次　2023 年 7 月第 10 次印刷

本次印数　00 001—504 000

标准书号　ISBN 978-7-5536-1855-5

定　　价　10.47 元

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与承印厂联系调换。

电话：0571-85229873

绿色印刷产品

定价批准文号：浙发改价格[2019]319 号、[2020]331 号

举报电话：12345、12315

ISBN 978-7-5536-1855-5